Beiträge zur Theorie der Kompakttafel

Inaugural-Dissertation
der philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

KURT STAUBER

von Zetzwil (Aargau)

BERN
Gedruckt bei Stämpfli & Cie.
1942

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547623_0083

Beiträge zur Theorie der Kompakttafel

Inaugural-Dissertation

der philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

KURT STAUBER

von Zetzwil (Aargau)

BERN

Gedruckt bei Stämpfli & Cie.

1942

Von der philosophischen Fakultät II auf Antrag von Herrn Prof. Dr. Alder angenommen.

Bern, den 10. Juli 1941.

Der Dekan: Prof. *Schopfer*.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Separatabzug aus den
„Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker"
1942 — Heft 1

An dieser Stelle möchte ich allen meinen Lehrern, den Herren Prof. Alder, Prof. Bohren, Prof. Scherrer, Prof. Hadwiger, Prof. Michel, P. D. Linder und Prof. Amonn für die mir während meines Studiums erwiesenen Anregungen meinen besten Dank aussprechen.

Besonderen Dank schulde ich Herrn Prof. Alder, auf dessen Anregung und unter dessen Leitung die vorliegende Arbeit entstanden ist.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

I. Teil.

Entwicklung der Theorie der Kompakttafel 2
§ 1. Der Begriff der Kompakttafel 2
§ 2. Der heutige Stand der Theorie 6
§ 3. Die Arbeiten von Del Vecchio 7

II. Teil.

Erweiterung der Kompakttafel durch Einführung der Altersverteilung . . 9
§ 1. Neue Definition der nach der Dauer abgestuften Ausscheideordnung 9
§ 2. Zusammenhang zwischen dem Deckungskapital nach der Selektionstafel und nach der Kompakttafel 18
§ 3. Der Verlauf von $\Delta_{(t)}$ 23
§ 4. Einige Funktionalgleichungen 32

III. Teil.

Praktische Auswertung 35
§ 1. Die Konstruktion der Kompakttafel 35
§ 2. Näherungsformeln für $\Delta_{(t)}$ 37
§ 3. Beispiel 40
Zusammenfassung 43
Tabellen 44
Literaturverzeichnis 49

Beiträge zur Theorie der Kompakttafel.

Von *Kurt Stauber*, Bern.

Einleitung.

Zum Zwecke der Herstellung einer Sterbetafel soll das statistische Material unter völliger Vernachlässigung des Alters x einzig nach der abgelaufenen Versicherungsdauer t gruppiert werden. Innerhalb der so entstehenden Teilgruppen lassen sich Sterbenswahrscheinlichkeiten berechnen, deren Gesamtheit die Herstellung einer neuartigen, als *Kompakttafel* bezeichneten Sterbetafel gestattet. Die Kompakttafel bildet den Gegenstand unserer Untersuchungen.

Vom theoretischen Standpunkt aus ist die Kompakttafel der *Aggregattafel* gleichzustellen, da bei beiden Sterbetafeln je nur einer der Parameter x und t berücksichtigt wird. Die *Selektionssterbetafel* dagegen ist ihnen formal überzuordnen, denn bei dieser werden sowohl das Alter als auch die abgelaufene Dauer in Betracht gezogen.

Ausser in theoretischer Hinsicht kann der Kompakttafel auch in praktischer Beziehung Bedeutung zukommen, indem sie sich zur direkten Berechnung des Deckungskapitals für einen gesamten Versicherungsbestand eignet.

Nebst einem Ausbau der Theorie der Kompakttafel werden wir einem gegen deren Verwendbarkeit geäusserten Einwand dadurch begegnen, dass wir die als konstant vorausgesetzte Altersverteilung $v(x)$ aller Eintrittsgenerationen eines Versicherungsbestandes in unsere Betrachtungen einbeziehen.

Im Hinblick auf die besondere Bedeutung der gemischten Versicherung im schweizerischen Versicherungsbestande beschränken wir uns auf Untersuchungen über die Verwendbarkeit der Kompakttafel zur Rücklagenberechnung dieser Versicherungsart.

I. Teil.

Entwicklung der Theorie der Kompakttafel.

§ 1.

Der Begriff der Kompakttafel.

In der Lebensversicherung werden die zu versichernden Personen (Risiken) vor dem Versicherungsabschluss gewöhnlich einer ärztlichen Untersuchung unterzogen. Diese sorgfältige Auslese oder Selektion bewirkt bekanntlich eine merkliche Verringerung der Sterbehäufigkeit in einer Gesamtheit, die sich aus derart ausgewählten Risiken zusammensetzt. Naturgemäss ist die Wirkung der Auslese in den ersten Versicherungsjahren besonders stark. Je weiter der Zeitpunkt der ärztlichen Untersuchung zurückliegt, desto schwächer ist der Einfluss der Selektion. Die Praxis trägt diesem Umstand in der Weise Rechnung, dass sie die Selektion nur während einer gewissen Dauer, der Selektionsdauer, berücksichtigt. Nach Ablauf der Selektionsdauer ist die Wirkung der Selektion bereits so verwischt, dass sie praktisch vernachlässigt werden kann.

Eine nach Alter und verflossener Versicherungsdauer abgestufte Sterbetafel nennt man Selektionstafel. Ordnet man das gesamte Beobachtungsmaterial nur nach dem Alter, so entsteht die gewöhnliche Aggregattafel.

Smolensky hat erstmals auf die Möglichkeit hingewiesen, das Beobachtungsmaterial nur nach der abgelaufenen Dauer zu ordnen [1][1]). Die so abgeleitete Sterbetafel bezeichnet er als Kompakttafel. Diesen Tatbestand hat Smolensky wie folgt formelmässig dargestellt:

Wenn mit $E_{[x-t]+t}$ und $\theta_{[x-t]+t}$ die Zahl der unter Risiko stehenden bzw. gestorbenen x-Jährigen im t. Versicherungsjahr bezeichnet wird, so ist die von Alter und Dauer abhängige einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit gegeben durch

$$q_{[x-t]+t} = \frac{\theta_{[x-t]+t}}{E_{[x-t]+t}}.$$

[1]) Zahlen in eckiger Klammer [ ] bezeichnen die betreffende Nummer im Literaturverzeichnis.

Mit Hilfe aller dieser Sterbenswahrscheinlichkeiten konstruiert man nach bekannten Methoden die Selektionstafel.

Die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit einer aus demselben Material abzuleitenden Aggregattafel ist definiert durch

$$q_x = \frac{\theta_x}{E_x}, \text{ mit } \theta_x = \sum_t \theta_{[x-t]+t}$$

$$\text{und } E_x = \sum_t E_{[x-t]+t}.$$

Bildet man dagegen

$$\theta_t = \sum_x \theta_{[x-t]+t}$$

$$\text{und } E_t = \sum_x E_{[x-t]+t},$$

so ist die Sterbenswahrscheinlichkeit der Kompakttafel durch

$$q_t = \frac{\theta_t}{E_t} \text{ bestimmt.}$$

Mit Hilfe der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten q_t bestimmen wir zunächst die Überlebensordnung l_t der Kompakttafel mittels der Beziehung $l_t = l_0\,(1—q_0) \ldots (1—q_{t-1})$.

In Anlehnung an das bekannte Vorgehen bei der Aggregattafel führen wir ferner neue Kommutationszahlen ein, wie:

$$D_t = v^t\, l_t,\ N_t = \sum_{\tau=t}^{\infty} D_\tau,\ d_t = l_t\, q_t,\ C_t = d_t\, v^{t+1} \qquad \text{usw.}$$

Die bei Anwendung der Aggregattafel sich ergebenden versicherungstechnischen Begriffe lassen sich jetzt sinngemäss auf entsprechende bei Verwendung einer Kompakttafel übertragen. Wenn mit n die vereinbarte Versicherungsdauer bezeichnet wird, lauten die bekanntesten Formeln:

Leibrentenbarwert: $\mathsf{a}_t = \frac{N_t}{D_t},\ \mathsf{a}_{t:\overline{n}|} = \frac{N_t - N_{t+n}}{D_t}.$

Barwert der Erlebensfallsumme «1»: ${}_nE_t = \frac{D_{t+n}}{D_t}$.

Barwert der temporären Todesfallversicherung «1»: ${}_{|n}A_t = \frac{M_t - M_{t+n}}{D_t}$.

Barwert der gemischten Versicherung «1»:

$$A_{t:\overline{n}|} = \frac{M_t - M_{t+n} + D_{t+n}}{D_t} = 1 - d \cdot \mathrm{a}_{t:\overline{n}|}.$$

Jahresprämie für die gemischte Versicherung «1»: $P_{t:\overline{n}|} = \frac{1}{\mathrm{a}_{t:\overline{n}|}} - d$.

Durch die formale Übertragung bekannter Formeln gelangen wir derart zu Grössen, die mit Ausnahme des Falles $t = 0$ nur theoretisches Interesse beanspruchen können.

Die vorstehenden Ausdrücke sind vom Alter des Versicherten unabhängig. Der Gebrauch der Kompakttafel kommt folglich dem Rechnen nach einer Durchschnittsmethode bei Verwendung einer Aggregattafel gleich, indem in beiden Fällen von jedem einzelnen Versicherten einheitliche, vom Alter unabhängige Durchschnittsleistungen verlangt werden. In diesem Sinne stehen der Kompakttafel vielleicht praktische Anwendungsmöglichkeiten offen, z. B. in der Sozialversicherung. In der vorliegenden Arbeit jedoch beschränken wir uns darauf, die Verwendbarkeit der Kompakttafel zur Ermittlung des Deckungskapitals einer gemischten Versicherung zu untersuchen, dessen formelmässiger Ausdruck lautet:

$$V_t = A_{t:\overline{n-t}|} - P_{0:\overline{n}|} \cdot \mathrm{a}_{t:\overline{n-t}|} = 1 - \frac{\mathrm{a}_{t:\overline{n-t}|}}{\mathrm{a}_{0:\overline{n}|}}.$$

(Im Folgenden verwenden wir für den Begriff des Deckungskapitals auch die Bezeichnungen Deckungsrücklage oder kurz Rücklage.)

Um die Bedeutung dieser Untersuchung darzutun, erinnern wir an die Wichtigkeit, die der Berechnung des Deckungskapitals gemischter Versicherungen für Bilanzzwecke zukommt. Sodann ist aber hauptsächlich der Umstand hervorzuheben, dass die Kompakttafel zufolge ihrer Eigenschaft, den Sterblichkeitsverlauf in Abhängigkeit von der

abgelaufenen Dauer wiederzugeben, die Selektionswirkung berücksichtigt. Dieser Vorzug ist zwar ebenfalls der Selektionstafel eigen, die ohnehin als das vollkommenste Instrument der Sterblichkeitsmessung angesehen werden muss. Trotz der wissenschaftlichen Einsicht aber, dass die Auslese den zahlenmässigen Wert gewisser versicherungsmathematischer Funktionen spürbar zu beeinflussen vermag und daher der Gebrauch der Selektionstafel geboten wäre, verzichtet man in der Praxis fast regelmässig auf deren Verwendung. An ihrer Stelle benützt man die Aggregattafel, die einfacher zu handhaben ist als jene, die jedoch die Unzulänglichkeit hat, die Selektion nicht zu berücksichtigen [2].

Es erhebt sich hier die Frage, ob die Kompakttafel dazu berufen sein könnte, überall da Verwendung zu finden, wo die Berücksichtigung der Selektion wünschbar ist. Es kann nicht unser Ziel sein, diese Frage in ihrer Allgemeinheit abzuklären. Hinsichtlich der Rücklagenberechnung gemischter Versicherungen scheint sie jedoch bejaht werden zu dürfen. Von entscheidender Bedeutung ist dabei die Tatsache, dass dem Deckungskapital dieser Versicherungsart bei vorgegebener Vertragsdauer n die ebenso bemerkenswerte wie bekannte Eigenschaft zukommt, vom Eintrittsalter x nur wenig abhängig zu sein, so dass es näherungsweise als Funktion der abgelaufenen Versicherungsdauer t allein betrachtet werden kann.

Unter Verwendung einer Kompakttafel hat Smolensky diese Besonderheit für die Ermittlung der Deckungsrücklage ausgewertet. Seine Berechnungen lassen den Schluss zu, dass die von ihm aufgestellte Kompakttafel für einen Versicherungsbestand Verwendung finden kann, dem ungefähr ein zwischen 30 und 40 Jahren gelegenes durchschnittliches Eintrittsalter entspricht (vgl. [1], Tabellen 2 und 3).

Naturgemäss werden die mit Hilfe der Kompakttafel bestimmten Deckungsrücklagen von den mittels der Selektionstafel berechneten etwas abweichen. Die Grösse der Abweichung ist massgebend für die Genauigkeit der Annäherung und damit für die Brauchbarkeit der Kompakttafel in der Rücklagenberechnung. (Zur Abkürzung werden wir für den Begriff des mittels der Selektionstafel berechneten Deckungskapitals auch Selektionsrücklage schreiben. Entsprechend führen wir die Begriffe Aggregatrücklage und Kompaktrücklage ein.)

§ 2.

Der heutige Stand der Theorie.

Mit der Bewertung der von Smolensky aufgestellten Kompakttafel hat sich *Jecklin* eingehend befasst [3], [4]. Für den Fall der gemischten Versicherung ermittelt er in vier schematischen Personengesamtheiten mit ganz verschiedenen Alters- respektive Summenverteilungen auf zwei Arten die Gesamtrücklagen, einmal durch genaue Einzelrechnung anhand der Selektionstafel, sodann unter Verwendung der Kompakttafel. Die einander entsprechenden Selektions- und Kompaktrücklagen weisen zum Teil recht erhebliche Abweichungen im positiven und negativen Sinne auf. Aus diesem Umstande folgert Jecklin, dass die Kompakttafel wegen ihrer Unfähigkeit, sich der richtigen Altersverteilung eines beliebigen Versicherungsbestandes anzupassen, ein zur Rücklagenberechnung untaugliches Mittel ist. An deren Stelle schlägt er die Verwendung einer von ihm entwickelten Gruppenmethode (Gruppen gleicher verflossener Dauer) vor, welche die folgende retrospektive Formel für das Deckungskapital zum Ausgangspunkt hat:

$$V_t = \frac{N_{[z]} - N_{[z]+t}}{D_{[z]+t}} \cdot \sum_x C \cdot P_{[x]:\overline{n}|} - \frac{M_{[z]} - M_{[z]+t}}{D_{[z]+t}} \cdot \sum_x C$$

$$= \frac{a_{[z]:\overline{t}|}}{{}_tE_{[z]}} \cdot \sum_x C \cdot P_{[x]:\overline{n}|} - \frac{{}_tA_{[z]}}{{}_tE_{[z]}} \cdot \sum_x C,$$

wobei z das mit den Versicherungssummen gewogene Mittel aller Eintrittsalter x bedeutet.

Im zweiten Teil unserer Arbeit soll der Versuch gemacht werden, die Kompakttafel zu erweitern durch Einführung der Altersverteilung $v(x)$ einer neu eintretenden Versichertengesamtheit. In diesem Zusammenhang verweisen wir auf eine Arbeit von Vajda, in welcher er bei Vorgabe einer Selektionstafel eine Aggregattafel so zu konstruieren sucht, dass diese für eine wohlbestimmte Versicherungsgeneration der Altersverteilung $v(x)$ die gleiche gesamte Prämieneinnahme gewährleistet wie die Selektionstafel [6]. Die derart berechnete Überlebensordnung weist einen sehr komplizierten Bau auf; sie steht in Abhängigkeit von der Altersverteilung $v(x)$ und vom Zinsfuss. Bemerkenswert ist für uns die Bedeutung, die Vajda der Altersverteilung

als dritter Rechnungsgrundlage neben der Sterblichkeit und dem Zinsfuss beimisst, indem wir bei der vorzunehmenden Erweiterung des Begriffes der Kompakttafel ebenfalls diese drei Grundlagen verwenden werden. Es wäre allerdings noch zu untersuchen, ob in der Praxis die Altersverteilungen der Eintrittsgenerationen verschiedener Geschäftsjahre wirklich den Anforderungen einer Rechnungsgrundlage in dem Sinne genügen, dass sie nur geringe Abweichungen voneinander aufweisen. Sodann ist der Einfluss der Variation von $v(x)$ auf die Absterbeordnung von Wichtigkeit.

Die soeben erwähnte Arbeit haben sich Bodoni und Crosato zum Ausgangspunkt zu einer Studie über die Kompakttafel genommen [7]. Die beiden Autoren kommen zum Schluss, dass sich der Barwert der gesamten Prämieneinnahme innerhalb einer Versicherungsgesamtheit bei Verwendung der Kompakttafel gleich hoch stellt wie bei Benützung einer Selektionstafel. Ebenso stimmen für den Fall der gemischten Versicherung gegen Einmaleinlage die Werte für das Gesamtdeckungskapital nach den beiden Tafeln überein. Keine Übereinstimmung der Deckungsrücklagen dagegen ergibt sich bei Entrichtung von Jahresprämien. Über die Grösse der hierbei auftretenden Abweichungen enthält die Arbeit keine Angaben.

Es erschien uns angebracht, den folgenden Untersuchungen von Del Vecchio wegen ihrer besonderen Bedeutung für unsere Arbeit einen eigenen Paragraphen zu widmen.

§ 3.

Die Arbeiten von Del Vecchio.

Als einziger Autor in der uns bekannten Literatur tritt Del Vecchio mit den Hilfsmitteln der Analysis an die Beurteilung der Kompakttafel heran [8]. Für eine Versicherung von allgemeinstem Typus überblickt er auf Grund der kontinuierlichen Methode erstmals die Wirkung auf das gesamte Deckungskapital einer geschlossenen Versicherungsgesamtheit im Zeitpunkt t, wenn zur Berechnung dieses Deckungskapitals an Stelle der Selektionstafel eine Kompakttafel verwendet wird.

Unter der Annahme, dass alle Eintrittsalter zwischen den Grenzen α und β liegen, definiert Del Vecchio die nach der Dauer abgestufte Überlebensordnung mit:

$$L_t = \int_{\alpha}^{\beta} l_{[x]+t}\, dx.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Sterbensintensitäten $\mu_{[x]+t}$ der Selektionstafel mit $[x]$ wachsen, folgert er für eine ganz allgemeine Versicherungskombination, dass die Kompaktrücklage $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ ist als die Selektionsrücklage, falls die Prämienintensität $P_{[x]}$ mit zunehmendem Eintrittsalter $[x]$ $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{grösser}\end{matrix}\right\}$ wird. Durch Spezialisieren ersieht man hieraus leicht, dass für die gemischte und für die Todesfallversicherung die Kompaktrücklagen kleiner ausfallen müssen als die Selektionsrücklagen, da $\bar{P}_{[x]}$ in beiden Fällen mit $[x]$ zunimmt. Diese Feststellung scheint im Widerspruch zu stehen mit dem Ergebnis Jecklins, wonach sich für die gemischte Versicherung Unterschiede der beiden Rücklagen im positiven *und* negativen Sinne ergeben haben. Wir werden an anderer Stelle auf dieses Verhalten zurückkommen und eine Erklärung dafür angeben.

Vorderhand ist für uns eine weitere Arbeit des gleichen Autors von Interesse, in welcher er die Sterbensintensität μ_t der Kompakttafel ableitet. Es ist:

$$\mu_t = -\frac{\frac{d}{dt} L_t}{L_t} = -\frac{\frac{d}{dt}\int_{\alpha}^{\beta} l_{[x]+t} \cdot dx}{\int_{\alpha}^{\beta} l_{[x]+t} \cdot dx} = -\frac{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} l_{[x]+t}\, dx}{\int_{\alpha}^{\beta} l_{[x]+t}\, dx},$$

und wegen $\qquad \frac{d}{dt} l_{[x]+t} = -\, l_{[x]+t} \cdot \mu_{[x]+t} \qquad$ folgt

$$\mu_t = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} l_{[x]+t} \cdot \mu_{[x]+t} \cdot dx}{\int_{\alpha}^{\beta} l_{[x]+t} \cdot dx}.$$

Unter der Voraussetzung, dass $l_{[x]+t}$ konkaven Verlauf gegen die t-Achse befolgt, schliesst Del Vecchio auf monoton wachsenden Verlauf der Intensitätsfunktion μ_t [9].

II. Teil.

Erweiterung der Kompakttafel durch Einführung der Altersverteilung.

Mit den Untersuchungen und Feststellungen Del Vecchios hat die Theorie der Kompakttafel einen gewissen Abschluss erreicht. Der praktischen Verwendung dieser Sterbetafel stehen jedoch noch gewichtige Bedenken entgegen, solange die berechtigten Einwände Jecklins nicht durch Gegenbeispiele entkräftigt worden sind. In erster Linie muss bei der Aufstellung der Kompakttafel die als konstant vorausgesetzte Altersverteilung aller Eintrittsgenerationen eines Versicherungsbestandes angemessene Berücksichtigung finden. Sodann sollen, in Anlehnung an das Vorgehen Del Vecchios, Untersuchungen über die Abweichungen der Kompaktrücklage von der Selektionsrücklage auch hinsichtlich der erweiterten Kompakttafel gemacht werden. Für die praktische Wertung der Kompakttafel ist dabei nicht nur das Vorzeichen, sondern ebenso die absolute Grösse dieser Abweichung von entscheidender Bedeutung. Nach der nun vorzunehmenden Abklärung der Vorzeichenfrage werden wir deshalb die kontinuierliche Methode verlassen, um in einem praktischen dritten Teil unserer Arbeit auf diskontinuierlichem Wege Berechnungen in diesem Sinne anzustellen.

§ 1.

Neue Definition der nach der Dauer abgestuften Ausscheideordnung.

Vorerst betrachten wir für ein einzelnes Geschäftsjahr den Neuzugang an gemischten Versicherungen, die alle für dieselbe Dauer n abgeschlossen seien. Diesen Neuzugang, der eine wohlbestimmte Anzahl Versicherte verschiedener Alter umfasst, haben wir als geschlossene Personengesamtheit aufzufassen. Im Verlauf der Zeit wird diese geschlossene Gesamtheit unter dem Einfluss verschiedener Ursachen, wie Sterblichkeit und Storno, abnehmen, um nach Ablauf der Versicherungsdauer in n Jahren ganz aus der Betrachtung auszuscheiden.

Wir wollen für jeden Zeitpunkt die Anzahl der der Gesamtheit noch angehörenden Elemente ermitteln. Offenbar erhalten wir auf diese Weise eine Ausscheideordnung, in welcher die Anzahl der Überlebenden als Funktion der verflossenen Zeit erscheint. Diese Ausscheideordnung entspricht somit unserer Kompakttafel. Wenn t die seit Versicherungsbeginn verflossene Zeit bedeutet, so möge L_t die Anzahl der Überlebenden zur Zeit t bezeichnen; L_0 bedeutet also die Zahl der zu Beginn der Versicherung vorhandenen Personen.

Um den Umfang der Gesamtheit für jeden Zeitpunkt t, d. h. um für die Kompakttafel die L_t berechnen zu können, ist jedenfalls die Kenntnis der Altersverteilung der Eintrittsgeneration unerlässlich. Diese Altersverteilung sei durch die normierte Verteilung $v(x)$ gegeben, wobei wir uns allerdings vorbehalten, im Hinblick auf die Erfordernisse der Praxis unter dieser Verteilung nötigenfalls auch eine Summenverteilung zu verstehen.

Wegen der Normiertheit von $v(x)$ ist

$$\int_0^\infty v(x) \cdot dx = 1. \tag{1}$$

Wir erstrecken hier die Integration bis ins Unendliche, obschon wir, ähnlich wie Del Vecchio, ein niedrigstes und ein höchstes Eintrittsalter hätten postulieren können. Vom mathematischen Standpunkt aus erscheint uns diese Darstellung die vollkommenere zu sein, nur müssen wir die Existenz des uneigentlichen Integrals (1) ausdrücklich voraussetzen.

Die Zahl der beim Eintritt genau x-jährigen Personen ist gegeben durch

$$L_0 \cdot v(x) \cdot dx.$$

Wir wollen im folgenden bei der Konstruktion der Kompakttafel von der Wirkung des Stornos ganz absehen. Dann wird die Personengesamtheit nur noch unter dem Einfluss der Sterblichkeit abnehmen. Wir treffen die weitere Annahme, der wirkliche Sterblichkeitsverlauf werde durch eine Selektionstafel genau wiedergegeben. Wir betonen hier ausdrücklich, dass dies nicht etwa einer Einschränkung in dem Sinne gleichkommt, dass nicht auch eine Aggregattafel zur Konstruktion der Kompakttafel herangezogen werden könnte. Wir haben für diesen Fall in den nun folgenden Entwicklungen die

der Selektionstafel entnommenen Grössen nur durch die entsprechenden Werte aus der Aggregattafel zu ersetzen.

Nach unserer Annahme sind also von den bei Versicherungsbeginn x-Jährigen nach Ablauf der Zeit t noch

$$L_0 \cdot v(x) \cdot \frac{l_{[x]+t}}{l_{[x]}} \cdot dx = L_0 \cdot v(x) \cdot {}_tp_{[x]} \cdot dx$$

überlebende $(x+t)$-Jährige vorhanden.

Wir fassen jetzt alle Personen, die im t. Versicherungsjahr stehen, durch Integration über x zusammen und erhalten als Überlebensordnung für die Kompakttafel

$$L_t = \int_0^\infty L_0 \cdot v(x) \cdot {}_tp_{[x]} \cdot dx. \qquad (2)$$

Im Anschluss an diese neue Definition der Kompakttafel bringen wir zunächst einige Erörterungen mathematischer Natur an. Vor allem stellen wir fest, dass das uneigentliche Integral (2) eine Funktion von t ist. Sodann lässt der monotone Charakter von ${}_tp_{[x]}$ unter Verwendung der Beziehung (1) leicht erkennen, dass das zur Diskussion stehende Integral in t gleichmässig konvergiert. Nach Sätzen der Analysis kann somit bei einer allfällig vorzunehmenden Integration über t die Integrationsreihenfolge vertauscht werden.

Auch die Differentiation nach t darf auf der rechten Seite von (2) unter dem Integralzeichen ausgeführt werden, wenn nur das uneigentliche Integral über diese Ableitung wieder gleichmässig konvergiert.

Die Intensität der Sterblichkeit nach der Kompakttafel ist in sinngemässer Anlehnung an diesen Begriff für die Aggregat- oder Selektionstafel definiert durch

$$\mu_t = -\frac{\frac{d}{dt} L_t}{L_t} = -\frac{L_t'}{L_t}$$

$$= \frac{L_0 \int_0^\infty v(x) \frac{d}{dt} {}_tp_{[x]} \cdot dx}{\int_0^\infty L_0 v(x) {}_tp_{[x]} \cdot dx}$$

oder
$$\mu_t = \frac{\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\mu_{[x]+t} \cdot dx}{\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, dx}. \qquad (3)$$

Diese Darstellung ist richtig, wenn die gleichmässige Konvergenz in t des Zählerintegrals in (3) feststeht. Für irgendeine Sterbetafel lässt sich aber immer eine Schranke M so angeben, dass für jedes x und t stets gilt

$${}_tp_{[x]} \cdot \mu_{[x]+t} < M,$$

mit welcher Tatsache die gleichmässige Konvergenz des in Frage stehenden Integrals, wieder in Verbindung mit (1), unmittelbar bewiesen werden kann.

Nachdem so die Zulässigkeit der Definition und Darstellung einer Intensität der Sterblichkeit μ_t für eine Kompakttafel sichergestellt ist, wenden wir uns wieder der Beziehung (3) zu. Eine nähere Betrachtung der rechten Seite dieser Gleichung lässt leicht erkennen, *dass μ_t als gewogenes Mittel der $\mu_{[x]+t}$ interpretiert werden kann*, wobei die Anzahlen

$$L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, dx$$

der $(x+t)$-Jährigen als Gewichte auftreten. Auch von diesem Gesichtspunkt aus erscheint also unsere Definition der Kompakttafel als zweckmässig, da sie auf einer Mischung der Sterbensintensitäten der Selektionstafel nach Massgabe der Besetzung der einzelnen Alter beim Beobachtungsmaterial beruht.

In § 1 des ersten Teils haben wir einige bekannte Formeln für die Kompakttafel dargestellt. Ohne uns weiter um die reale Bedeutung der nun folgenden Beziehungen zu kümmern, stellen wir nach der kontinuierlichen Methode die Formeln für einige versicherungstechnische Grössen bei Verwendung einer Kompakttafel auf.

Der Barwert einer kontinuierlichen, temporären Leibrente «1», die bereits während der Dauer t geleistet worden ist und deren restliche Laufzeit noch $(n-t)$ beträgt, ist

$$\bar{a}_{t:\overline{n-t}|} = \int_t^n e^{-\delta(\tau-t)} \frac{L_\tau}{L_t}\, d\tau = \int_t^n \frac{D_\tau}{D_t}\, d\tau.$$

Zwischen diesem und dem analogen, nach der Selektionstafel berechneten Rentenbarwert besteht eine interessante Beziehung. Es ist bekanntlich

$$\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|} = \int_t^n e^{-\delta(\tau-t)} \frac{l_{[x]+\tau}}{l_{[x]+t}} d\tau .$$

Unter der Zahl L_t befinden sich $L_0 v(x)\, {}_tp_{[x]}\, dx$, die vor der Zeit t im Alter von $[x]$ der Gesamtheit L_0 beigetreten sind. Wird jedem davon eine kontinuierlich zahlbar gedachte, temporäre Leibrente «1» während der Dauer $(n—t)$ ausgerichtet, so ist der Barwert dieser Renten gegeben durch

$$(a) \qquad L_0 v(x)\, {}_tp_{[x]}\, dx \cdot \bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|} = L_0 v(x)\, {}_tp_{[x]} \int_t^n e^{-\delta(\tau-t)} \frac{l_{[x]+\tau}}{l_{[x]+t}} d\tau \cdot dx.$$

Die Belastung aus einer solchen temporären Rente «1» für alle L_t Personen erhalten wir durch Summation über alle Alter x zu

$$(b) \qquad \int_0^\infty L_0 v(x)\, {}_tp_{[x]}\, a_{[x]+t:\overline{n-t}|}\, dx = \int_0^\infty L_0 v(x)\, {}_tp_{[x]} \int_t^n e^{-\delta(\tau-t)} \frac{l_{[x]+\tau}}{l_{[x]+t}} d\tau\, dx .$$

Da nach den soeben gemachten Feststellungen die Reihenfolge der Integration vertauscht werden darf, so folgt für die rechte Seite von (b)

$$\int_0^\infty L_0 v(x)\, {}_tp_{[x]} \int_t^n e^{-\delta(\tau-t)} \frac{l_{[x]+\tau}}{l_{[x]+t}} d\tau\, dx = \int_t^n d\tau \int_0^\infty L_0 v(x) \frac{l_{[x]+t}}{l_{[x]}} \frac{e^{-\delta(\tau-t)} l_{[x]+\tau}}{l_{[x]+t}} dx$$

$$= \int_t^n e^{-\delta(\tau-t)} \int_0^\infty L_0 v(x)\, {}_tp_{[x]} dx \cdot d\tau$$

$$= \int_t^n e^{-\delta(\tau-t)} \cdot L_\tau\, d\tau \qquad \text{wegen} \qquad (2).$$

Somit ist $\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, \bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}\, dx = L_t \cdot \bar{a}_{t:\overline{n-t}|}$ oder

$$\bar{a}_{t:\overline{n-t}|} = \frac{\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, \bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}\, dx}{\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, dx}. \qquad (4)$$

Man sieht also, *dass auch der Rentenbarwert nach der Kompakttafel als gewogenes Mittel der Rentenbarwerte nach der Selektionstafel erscheint.* Als mathematische Folge davon können aber weiter sämtliche nach der Kompakttafel berechneten Versicherungswerte, die sich linear durch Rentenbarwerte darstellen lassen, als gewogene Mittel der ihnen entsprechenden Werte nach der Selektionstafel ausgedrückt werden. Demzufolge muss speziell für den Barwert der gemischten Versicherung «1» gelten

$$\bar{A}_{t:\overline{n-t}|} = \frac{\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, \bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|} \cdot dx}{\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, dx}, \qquad (5)$$

da ja $\bar{A}_{t:\overline{n-t}|} = 1 - \delta \cdot \bar{a}_{t:\overline{n-t}|}$

und entsprechend $\bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|} = 1 - \delta\, \bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}$ ist.

Schreiben wir die Beziehung (5) noch in der Form

$$L_t \cdot \bar{A}_{t:\overline{n-t}|} = \int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, \bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|}\, dx, \qquad (5')$$

so erkennen wir unmittelbar, *dass für eine gemischte Versicherung gegen Einmaleinlage das Gesamtdeckungskapital nach der Kompakttafel mit dem Gesamtdeckungskapital nach der Selektionstafel übereinstimmt.* Damit haben wir auch für die erweiterte Kompakttafel und auf kontinuierlichem Weg eine schon früher festgestellte Eigenschaft der Kompakttafel (vgl. § 2 des I. Teils) nachgewiesen.

Dass ferner der Barwert der totalen Prämieneinnahme nach der Kompakttafel mit dem entsprechenden Barwert nach der Selektionstafel bei Entrichtung von Einmaleinlagen übereinstimmt, beweist man mit der Beziehung (5′) für $t = 0$.

Ebenso einfach gestaltet sich der Beweis für den Fall einer prämienpflichtigen Versicherung, für welche gilt

$$\int_0^\infty L_0\, v(x)\, \overline{P}_{0:\overline{n}|}\, \bar{a}_{[x]:\overline{n}|}\, dx = \overline{P}_{0:\overline{n}|} \int_0^\infty L_0\, v(x)\, \bar{a}_{[x]:\overline{n}|}\, dx$$

$$= L_0\, \overline{P}_{0:\overline{n}|}\, a_{0:\overline{n}|} = L_0 A_{0:\overline{n}|}.$$

Von sehr grosser Bedeutung ist nun aber die Tatsache, dass

$$\int_0^\infty \frac{L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}}{\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}}\, dx$$

nicht auch durch den reziproken Kompaktrentenbarwert $\dfrac{1}{\bar{a}_{t:\overline{n-t}|}}$ dargestellt werden kann. Wir beweisen dies unter Zuhilfenahme der folgenden allgemeinen Ungleichung (siehe Pólya und Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, S. 54):

Wenn im Intervalle $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ die Funktionen $f(x)$ und $p(x)$ stetig und positiv sind und ausserdem gilt $f(x) \not\equiv$ konstant, so ist

$$\frac{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{p(x)}{f(x)}\, dx} < \frac{\int_{x_1}^{x_2} p(x) f(x)\, dx}{\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx}.$$

Setzen wir für $0 \leqslant t < n$ $\qquad p(x) = L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}$

und $\qquad f(x) = \bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}$,

so folgt unter Abänderung der Integrationsgrenzen

$$\frac{\int_0^{\sim} L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, dx}{\int_0^{\infty} \frac{L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}}{\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}}\, dx} < \frac{\int_0^{\infty} L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, \bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}\, dx}{\int_0^{\infty} L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, dx} = \bar{a}_{t:\overline{n-t}|}$$

oder auch

$$\frac{1}{\bar{a}_{t:\overline{n-t}|}} < \frac{\int_0^{\infty} \frac{L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}}{\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}}\, dx}{\int_0^{\infty} L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, dx}. \tag{6}$$

Der reziproke Rentenbarwert nach der Kompakttafel ist also kleiner als das gewogene Mittel der reziproken Rentenbarwerte nach der Selektionstafel.

Hier verdient noch die folgende Tatsache Beachtung. Wegen der Grenzwertbeziehung

$$\lim_{x \to \infty} \bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|} = 0$$

ist die Existenz des uneigentlichen Integrals im Zähler des Ausdruckes (6) fraglich. Um dieser Schwierigkeit zu begegnen, setzen wir $r(x)$ so voraus, dass für jedes x und für $t < n$ gilt

$$\frac{v(x)\, {}_tp_{[x]}}{\bar{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}} \leqslant \frac{M}{x^{\nu}},$$

wo M eine von x und t unabhängige feste Schranke bedeutet und $\nu > 1$ ist. Damit ist die Konvergenz des diskutierten uneigentlichen Integrals gesichert.

Die Ungleichung (6) verhindert natürlich, dass auch die nach der Kompakttafel berechnete Prämie $P_{[x]:\overline{n}|}$ als gewogenes Mittel der $P_{[x]:\overline{n}|}$ gewonnen werden kann, da sich ja die Prämie durch den reziproken Rentenbarwert abzüglich Zinsintensität darstellen lässt.

Es ist nach (6) für $t = 0$

$$\overline{P}_{0:\overline{n}|} < \int_0^\infty v(x)\, \overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\, dx\,. \tag{7}$$

Demgegenüber führen wir noch zwei weitere Barwerte nach der Kompakttafel an, die sich durch Mittelwertbildung aus den entsprechenden Barwerten nach der Selektionstafel gewinnen lassen, nämlich den Barwert ${}_{n-t}E_t$ der Erlebensfallversicherung und den Barwert ${}_{|n-t}\bar{A}_t$ der temporären Todesfallversicherung «1». Es ist

$$\begin{aligned}\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, {}_{n-t}E_{[x]+t}\, dx &= \int_0^\infty L_0\, v(x)\, \frac{l_{[x]+t}}{l_{[x]}}\, v^{n-t}\, \frac{l_{[x]+n}}{l_{[x]+t}}\, dx \\ &= v^{n-t} \int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_np_{[x]}\, dx \\ &= v^{n-t}\, L_n\end{aligned}$$

und somit nach Division der Gleichung durch L_t:

$${}_{n-t}E_t = \frac{\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]} \cdot {}_{n-t}E_{[x]+t}\, dx}{L_t}\,.$$

Ebenso gilt

$${}_{|n-t}\bar{A}_t = \frac{\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\ {}_{n-t}\bar{A}_{[x]+t}\, dx}{L_t}\,,$$

denn es ist

$$\begin{aligned}\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, {}_{|n-t}\bar{A}_{[x]+t}\, dx &= \int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_tp_{[x]}\, (\bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|} - {}_{n-t}E_{[x]+t})\, dx \\ &= L_t\, (\bar{A}_{t:\overline{n-t}|} - {}_{n-t}E_t) = L_t\, {}_{|n-t}\bar{A}_t\,.\end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen und mit einigen Erkenntnissen über die Zusammenhänge zwischen der Kompakttafel und der Selektionstafel versehen, wenden wir uns nun der Hauptaufgabe dieser Arbeit zu. Im folgenden Paragraphen wollen wir, ähnlich wie wir dies soeben für Rentenbarwert, Einmaleinlage der gemischten Versicherung usw. getan haben, Zusammenhänge zwischen den Deckungsrücklagen nach der Kompakttafel und nach der Selektionstafel aufzeigen.

§ 2.

Zusammenhang zwischen dem Deckungskapital nach der Selektionstafel und nach der Kompakttafel.

In den folgenden Untersuchungen beschränken wir uns auf die Betrachtung des Nettodeckungskapitals.

Auf Grund der prospektiven Methode berechnet sich das Kompaktdeckungskapital für eine gemischte Versicherung für die Versicherungsleistung «1» aus

$$\overline{V}_t^k = \bar{A}_{t:\overline{n-t|}} - \overline{P}_{0:\overline{n|}}\,\bar{a}_{t:\overline{n-t|}},$$

wobei mit dem oberen Index k angegeben wird, dass es sich um das nach der Kompakttafel berechnete Deckungskapital handelt. Aus

$$\bar{A}_{t:\overline{n-t|}} = 1 - \delta \cdot \bar{a}_{t:\overline{n-t|}} \quad \text{und} \quad \overline{P}_{0:\overline{n|}} = \frac{1}{\bar{a}_{0:\overline{n|}}} - \delta$$

folgt

$$\underline{V_t^k = 1 - \frac{\bar{a}_{t:\overline{n-t|}}}{\bar{a}_{0:\overline{n|}}}}. \tag{8}$$

welche Beziehung das Analogon zu bekannten Relationen bei Verwendung einer Selektions- oder Aggregattafel darstellt.

In den weitern Untersuchungen werden wir auch die folgende retrospektive Form für das Deckungskapital benötigen:

$$\overline{V}_t^k = \int_0^t \frac{D_\tau}{D_t}\,(\overline{P}_{0:\overline{n|}} - \mu_\tau)\,d\tau = \frac{\bar{a}_{0:\overline{t|}} \cdot \overline{P}_{0:\overline{n|}} - {}_t\bar{A}_0}{{}_tE_0}. \tag{9}$$

Für die L_t Überlebenden beläuft sich somit das gesamte Deckungskapital nach der Kompakttafel auf

$$L_t \cdot V_t^k = e^{\delta t} \int_0^t D_\tau \, (P_{0:\overline{n}|} - \mu_\tau) \, d\tau .$$

Wir richten jetzt unser Interesse dem Betrag zu, der sich durch Einzelrechnung mit der Selektionstafel ergibt. Das Einzeldeckungskapital für diesen Fall ist nach der retrospektiven Berechnungsweise gegeben durch den Ausdruck

$${}_t\overline{V}_{[x]} = \int_0^t \frac{D_{[x]+\tau}}{D_{[x]+t}} \, (\overline{P}_{[x]:\overline{n}|} - \mu_{[x]+\tau}) \, d\tau .$$

Für alle im Eintrittsalter $[x]$ abgeschlossenen Versicherungen ergibt sich nach der Zeit t das Deckungskapital zu

$$L_0 \, v(x) \, {}_tp_{[x]} \cdot dx \cdot {}_t\overline{V}_{[x]} = L_0 \, v(x) \, {}_tp_{[x]} \int_0^t \frac{D_{[x]+\tau}}{D_{[x]+t}} \, (\overline{P}_{[x]:\overline{n}|} - \mu_{[x]+\tau}) \, d\tau \cdot dx .$$

Das Deckungskapital für die Gesamtheit aller Überlebenden stellt sich somit für die Zeit t nach Abschluss der Versicherung auf

$$\int_0^\infty L_0 \, v(x) \, {}_tp_{[x]} \, {}_t\overline{V}_{[x]} \, dx = \int_0^\infty L_0 \, v(x) \, {}_tp_{[x]} \cdot \int_0^t \frac{D_{[x]+\tau}}{D_{[x]+t}} \, [\overline{P}_{[x]:\overline{n}|} - \mu_{[x]+\tau}] \, d\tau \, dx .$$

Da auch hier die Integrationsreihenfolge vertauscht werden darf, folgt

$$\int_0^\infty L_0 \, v(x) \, {}_tp_{[x]} \, {}_t\overline{V}_{[x]} \, dx = \int_0^t \frac{e^{-\delta\tau}}{e^{-\delta t}} \int_0^\infty L_0 \, v(x) \, \frac{l_{[x]+t}}{l_{[x]}} \, \frac{l_{[x]+\tau}}{l_{[x]+t}} \, [\overline{P}_{[x]:\overline{n}|} - \mu_{[x]+\tau}] \, dx \, d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{e^{-\delta\tau}}{e^{-\delta t}} \int_0^\infty L_0 \, v(x) \, {}_tp_{[x]} \, [\overline{P}_{[x]:\overline{n}|} - \mu_{[x]+\tau}] \, dx \, d\tau .$$

Wie schon bemerkt, kann angesichts der Ungleichung (6) das uneigentliche Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung wegen des Auftretens von $\overline{P}_{[x]:\overline{n}|}$ nicht, wie wir das bei (3), (4) und (5) gewohnt waren, durch den entsprechenden Wert nach der Kompakttafel ersetzt werden. Wir behelfen uns aber dadurch, dass wir das gewogene Mittel der $\overline{P}_{[x]:\overline{n}|}$ speziell definieren und zu diesem Zweck die Substitution ansetzen

$$\overline{P}_\tau = \frac{\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_\tau p_{[x]}\, \overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\, dx}{\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_\tau p_{[x]}\, dx}. \tag{10}$$

$\overline{P}_\tau$ stellt offenbar die durchschnittliche Prämienintensität im Zeitpunkt τ nach Abschluss der Versicherung dar. Diese Grösse wird im nächsten Paragraphen Gegenstand einer besonderen Untersuchung sein. Für den Augenblick aber leistet sie uns zur Vereinfachung der Formel für das gesamte Deckungskapital der L_t Personen gute Dienste. Es wird nämlich wegen (3) und (10)

$$\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_t p_{[x]}\, {}_t\overline{V}_{[x]}\, dx = e^{\delta t} \int_0^t e^{-\delta\tau}\, L_\tau \left[\overline{P}_\tau - \mu_\tau\right] d\tau. \tag{11}$$

Wenn wir auch das gewogene Mittel $\overline{V}_t^s$ der Selektionsrücklage ${}_t\overline{V}_{[x]}$ auf der linken Seite dieser Gleichung definieren als

$$\overline{V}_t^s = \frac{\int_0^\infty L_0\, v(x)\, {}_t p_{[x]}\, {}_t V_{[x]}\, dx}{L_t}, \tag{12}$$

so haben wir den Betrag ermittelt, der nach Ablauf der Zeit t seit Abschluss der Versicherung durchschnittlich für jeden Versicherten als Deckungskapital zu bestellen ist. Das mit Hilfe der Einzelrechnung ermittelte Gesamtdeckungskapital ergibt sich nach (12) einfach durch das Produkt $L_t \cdot V_t^s$. Mit der neuen Substitution (12) geht dieses Produkt oder, was gleichbedeutend ist, der Ausdruck (11) für die gesamte Selektionsrücklage über in

$$L_t \cdot \overline{V}_t^s = e^{\delta t} \int_0^t D_\tau \, (\overline{P}_\tau - \mu_\tau) \, d\tau .$$

Als *durchschnittliches Deckungskapital* für die Versicherung «1» nach der Dauer t seit Abschluss ergibt sich somit

$$\overline{V}_t^s = \int_0^t \frac{D_\tau}{D_t} \, (\overline{P}_\tau - \mu_\tau) \, d\tau . \tag{13}$$

Damit sind wir in der Lage, die Gesamtrücklagen nach der Selektionstafel und nach der Kompakttafel einander gegenüberzustellen. Es ist dabei unwesentlich, wenn wir uns auf einen Vergleich der Durchschnittswerte $\overline{V}_t^s$ und $\overline{V}_t^k$ beschränken, da ja die entsprechenden Gesamtrücklagen je durch Multiplikation mit L_t erhalten werden.

Die Gegenüberstellung von (13) und (9) lässt erkennen, dass die Gleichungen für $\overline{V}_t^s$ und $\overline{V}_t^k$ miteinander übereinstimmen bis auf die Prämie. Wir konstatieren jetzt die Auswirkung des Umstandes, dass das gewogene Mittel der $\overline{P}_{[x]:\overline{n}|}$ nicht die konstante Prämie $\overline{P}_{0:\overline{n}|}$ nach der Kompakttafel, sondern die variable Durchschnittsprämie $\overline{P}_\tau$ ergibt. Diese Tatsache bewirkt denn auch, dass die Deckungsrücklagen nach der Selektionstafel und der Kompakttafel voneinander abweichen. Die Analysierung der dabei auftretenden Abweichung ist eine unserer Hauptaufgaben.

Wir bilden mithin die Differenz

$$\Delta_{(t)} = \overline{V}_t^s - \overline{V}_t^k . \tag{14}$$

Die Grösse der Differenzfunktion $\Delta_{(t)}$ ist ein Kriterium für die Brauchbarkeit der Kompakttafel zur Berechnung des Deckungskapitals ganzer Versicherungsbestände.

Aus (9) und (13) folgt

$$\Delta_{(t)} = \int_0^t \frac{D_\tau}{D_t} \, (\overline{P}_\tau - \overline{P}_{0:\overline{n}|}) \, d\tau . \tag{15}$$

Für spätere Zwecke geben wir noch eine andere Darstellung für $\Delta_{(t)}$. Setzen wir nämlich in (10)

$$P'_{[x]:\overline{n}|} = \frac{1}{\bar{a}_{[x]:\overline{n}|}} - \delta,$$

so ergibt sich

$$\overline{P}_\tau = \frac{\int_0^\infty \frac{L_0\, v(x)\ {}_\tau p_{[x]}}{\bar{a}_{[x]:\overline{n}|}}\, dx}{\int_0^\infty L_0\, v(x)\ {}_\tau p_{[x]}\, dx} - \delta.$$

Diesen Ausdruck setzen wir in (15) ein und erhalten, da

$$\overline{P}_{0:\overline{n}|} = \frac{1}{\bar{a}_{0:\overline{n}|}} - \delta \qquad \text{ist,}$$

$$\Delta_{(t)} = \int_0^t \frac{D_\tau}{D_t} \left[\frac{\int_0^\infty \frac{L_0\, v(x)\ {}_\tau p_{[x]}}{\bar{a}_{[x]:\overline{n}|}}\, dx}{L_\tau} - \delta^- \frac{1}{\bar{a}_{0:\overline{n}|}} + \delta \right] d\tau$$

$$= \frac{1}{D_t} \int_0^t e^{-\delta\tau} \int_0^\infty \frac{L_0\, v(x)\ {}_\tau p_{[x]}}{a_{[x]:\overline{n}|}}\, dx \cdot d\tau - \frac{1}{\bar{a}_{0:\overline{n}|}} \int_0^t \frac{D_\tau}{D_t}\, d\tau$$

und durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge

$$= \frac{1}{D_t} \left\{ \int_0^\infty \frac{L_0\, v(x)}{\bar{a}_{[x]:\overline{n}|}} \int_0^t e^{-\delta\tau}\ {}_\tau p_{[x]}\, d\tau\, dx - \frac{1}{\bar{a}_{0:\overline{n}|}} \int_0^t D_\tau\, d\tau \right\}$$

$$- \frac{1}{D_t} \left\{ \int_0^\infty \frac{L_0\, v(x)}{a_{[x]:\overline{n}|}} \cdot \bar{a}_{[x]:\overline{t}|}\, dx - \frac{L_0 \cdot \bar{a}_{0:\overline{t}|}}{\bar{a}_{0:\overline{n}|}} \right\}.$$

Wegen (1) ist

$$\frac{\bar{a}_{0:\overline{t}|}}{\bar{a}_{0:\overline{n}|}} = \int_0^\infty v(x)\,\frac{\bar{a}_{0:\overline{t}|}}{\bar{a}_{0:\overline{n}|}}\,dx.$$

Somit geht die Gleichung für die Differenzfunktion über in

$$\underline{\Delta_{[t]} = \frac{1}{{}_tE_0}\int_0^\infty v(x)\left[\frac{\bar{a}_{[x]:\overline{t}|}}{\bar{a}_{[x]:\overline{n}|}} - \frac{\bar{a}_{0:\overline{t}|}}{\bar{a}_{0:\overline{n}|}}\right]dx.} \qquad (16)$$

Dabei haben wir berücksichtigt, dass $\dfrac{L_0}{D_t} = \dfrac{D_0}{D_t} = \dfrac{1}{{}_tE_0}$ ist.

§ 3.

Der Verlauf von $\Delta_{(t)}$.

Die Formeln (15) und (16) gestatten uns jetzt, die Differenzfunktion $\Delta_{(t)}$ zu studieren. Wir gehen zweckmässig von (15) aus, in welcher Beziehung uns alle Grössen mit Ausnahme von $\overline{P}_\tau$ geläufig sind. Für die weitern Untersuchungen ist die genaue Kenntnis der Funktion $\overline{P}_\tau$ unerlässlich, so dass wir zuerst diese Funktion studieren wollen. Nach (10) ist

$$P_\tau = \frac{\int_0^\infty L_0\,v(x)\,{}_\tau p_{[x]}\,\overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\,dx}{L_\tau}.$$

Als Ausdruck für die erste Ableitung erhalten wir

$$\frac{d}{d\tau}\overline{P}_\tau = \frac{-L_\tau\int_0^\infty L_0 v(x)\,{}_\tau p_{[x]}\mu_{[x]+\tau}\,\overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\,dx + L_\tau\mu_\tau\int_0^\infty L_0\,v(x)\,{}_\tau p_{[x]}\,\overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\,dx}{L_\tau^2}$$

$$= \frac{L_0}{L_\tau}\left\{\mu_\tau\int_0^\infty v(x)\,{}_\tau p_{[x]}\,\overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\,dx - \int_0^\infty v(x)\,{}_\tau p_{[x]}\,\mu_{[x]+\tau}\,\overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\,dx\right\},$$

also ist

$$\frac{d}{d\tau}\overline{P}_\tau = \frac{L_0}{L_\tau}\int_0^\infty v(x)\,{}_\tau p_{[x]}\,\overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\left[\mu_\tau - \mu_{[x]+\tau}\right]dx.$$

Um das Vorzeichen von $\frac{d}{d\tau}\overline{P}_\tau$ zu bestimmen, erinnern wir uns der Beziehung (3), aus der wir leicht entnehmen, dass

$$\int_0^\infty v(x)\,{}_\tau p_{[x]}\left[\mu_\tau - \mu_{[x]+\tau}\right]dx = 0 \qquad \text{ist.}$$

Unter der Voraussetzung, dass $\mu_{[x]+\tau}$ monoton in x wächst, nimmt die Differenz $[\mu_\tau - \mu_{[x]+\tau}]$, als Funktion von x betrachtet, monoton fallenden Verlauf, und zwar geht sie von positiven zu negativen Werten über, da nur derart das zuletzt erwähnte Integral Null sein kann.

An der Stelle $x = \xi$ schneide das Bild der Funktion $[\mu_\tau - \mu_{[x]+\tau}]$ die x-Achse, so dass also

$$\mu_\tau - \mu_{[\xi]+\tau} = 0$$

ist. Es muss infolgedessen gelten:

$$\int_0^\xi v(x)\,{}_\tau p_{[x]}\left[\mu_\tau - \mu_{[x]+\tau}\right]dx + \int_\xi^\infty v(x)\,{}_\tau p_{[x]}\left[\mu_\tau - \mu_{[x]+\tau}\right]dx = 0$$

oder

$$\int_0^\xi v(x)\,{}_\tau p_{[x]}\left[\mu_\tau - \mu_{[x]+\tau}\right]dx = \int_\xi^\infty v(x)\,{}_\tau p_{[x]}\left[\mu_{[x]+\tau} - \mu_\tau\right]dx. \qquad (17)$$

Da $\overline{P}_{[x]:\overline{n}|}$ wegen der vorausgesetzten Monotonie von $\mu_{[x]+\tau}$ mit wachsendem x selber monoton zunimmt, gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\int_0^{\xi} v(x)\ {}_\tau p_{[x]}\, \overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\, [\mu_\tau - \mu_{[x]+\tau}]\, dx < \overline{P}_{[\xi]:\overline{n}|} \int_0^{\xi} v(x)\ {}_\tau p_{[x]}\, [\mu_\tau - \mu_{[x]+\tau}]\, dx$$

$$\int_{\xi}^{\infty} v(x)\ {}_\tau p_{[x]}\, \overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\, [\mu_{[x]+\tau} - \mu_\tau]\, dx > \overline{P}_{[\xi]:\overline{n}|} \int_{\xi}^{\infty} v(x)\ {}_\tau p_{(x)}\, [\mu_{[x]+\tau} - \mu_\tau]\, dx$$

und somit wegen (17)

$$\int_{\xi}^{\infty} v(x)\ {}_\tau p_{[x]}\, \overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\, [\mu_{[x]+\tau} - \mu_\tau]\, dx > \overline{P}_{[\xi]:\overline{n}|} \int_0^{\xi} v(x)\ {}_\tau p_{[x]}\, [\mu_\tau - \mu_{[x]+\tau}]\, dx\,.$$

Weiter ist

$$\frac{d}{d\tau}\overline{P}_\tau = \frac{L_0}{L_\tau}\left\{\int_0^{\xi} v(x)\ {}_\tau p_{[x]}\, \overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\, [\mu_\tau - \mu_{[x]+\tau}]\, dx - \int_{\xi}^{\infty} v(x)\ {}_\tau p_{[x]}\, \overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\, [\mu_{[x]+\tau} - \mu_\tau]\, dx\right\}.$$

Wegen der soeben angegebenen Ungleichungen ist also

$$\frac{d}{d\tau}\overline{P}_\tau < \frac{L_0}{L_\tau}\left\{\overline{P}_{[\xi]:\overline{n}|} \int_0^{\xi} v(x)\ {}_\tau p_{[x]}\, [\mu_\tau - \mu_{[x]+\tau}]\, dx - \overline{P}_{[\xi]:\overline{n}|} \int_0^{\xi} v(x)\ {}_\tau p_{[x]}\, [\mu_\tau - \mu_{[x]+\tau}]\, dx\right\} = 0$$

oder

$$\frac{d}{d\tau}\overline{P}_\tau < 0\,. \tag{18}$$

Wir stellen als Resultat unserer Untersuchungen über $\overline{P}_\tau$ fest:

Wenn $\mu_{[x]+\tau}$ eine monoton wachsende Funktion ist, so ist die durch unsere Beziehung (10) definierte Funktion $\overline{P}_\tau$ monoton fallend.

Dieses Resultat wird später von Bedeutung.

Eine weitere, fast selbstverständliche Eigenschaft von $\overline{P}_\tau$ ergibt sich aus der Beziehung (10), die nach der Multiplikation mit $L_\tau\, d\tau$ auch in der Form

$$L_\tau\, \overline{P}_\tau\, d\tau = \int_0^{\infty} L_0\, v(x)\ {}_\tau p_{[x]}\, \overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\, dx \cdot d\tau$$

geschrieben werden kann. Die rechte Seite dieser Gleichung bringt den totalen Prämienaufwand des ganzen Bestandes im Zeitelement τ

bis $\tau + d\tau$ zum Ausdruck. Den auf den Versicherungsbeginn zurückdiskontierten Barwert aller Prämieneinnahmen ermitteln wir durch Integration über die ganze Versicherungsdauer zu

$$\int_0^n D_\tau \overline{P}_\tau d\tau = \int_0^n e^{-\delta\tau} \int_0^\infty L_0 \, v(x) \, {}_\tau p_{[x]} \, \overline{P}_{[x]:n} \, dx \cdot d\tau .$$

Dieser Gleichung ist zu entnehmen, dass die totale Prämieneinnahme gleich gross wird, ob wir nun von jedem Versicherten die individuelle Prämie $\overline{P}_{[x]:n}$ oder die mit dem Zeitpunkt ihres Verfalls variable Durchschnittsprämie $\overline{P}_\tau$ einfordern.

Aus der in § 1 des zweiten Teiles schon bewiesenen Gleichheit der Erwartungswerte der totalen Prämieneinnahme nach der Kompakttafel und nach der Selektionstafel folgt damit auch, dass gelten muss:

$$\int_0^n D_\tau \overline{P}_\tau d\tau = \int_0^n D_\tau \overline{P}_{0:\overline{n}|} d\tau . \tag{19}$$

Die mit (18) und (19) gewonnenen Erkenntnisse über die Funktion $\overline{P}_\tau$ machen wir uns jetzt in der Diskussion von $\Delta_{(t)}$ nutzbar.

Zunächst berechnen wir die Werte, die $\Delta_{(t)}$ an den Stellen 0 und n annimmt. Aus (15) folgt für $t = 0$ sofort

$$\Delta_{(0)} = 0 .$$

Für den Fall $t = n$ erhalten wir wegen (19) ausserdem

$$\Delta_{(n)} = 0.$$

Das Verschwinden von $\Delta_{(t)}$ für die Grenzen $t = 0$ und $t = n$ bedeutet, dass an diesen Stellen die Kompaktrücklage mit der Selektionsrücklage übereinstimmt. Von Interesse ist weiter die Grösse von $\Delta_{(t)}$ für das Innere des Intervalls $0 < t < n$. Um auch hier Werte zu erhalten, greifen wir auf die Formel (15) für die Differenzfunktion zurück, die lautet:

$$\Delta_{(t)} = \frac{1}{D_t} \int_0^t D_\tau \, (\overline{P}_\tau - \overline{P}_{0:\overline{n}|}) \, d\tau .$$

Das Vorzeichen von $\Delta_{(t)}$, über welches wir uns vorerst Klarheit verschaffen wollen, wird durch den Wert der Grösse $(\overline{P}_\tau - \overline{P}_{0:n|})$ bestimmt, da D_τ und D_t sicher positiv sind. $\overline{P}_{0:\overline{n}|}$ ist eine Konstante, während P_τ eine monoton fallende Funktion ist. Aus der Beziehung (19) folgt sofort, dass

$$\int_0^n D_\tau (\overline{P}_\tau - \overline{P}_{0:\overline{n}|})\, d\tau = 0$$

ist, was nur dann möglich ist, wenn die Funktion $(\overline{P}_\tau - \overline{P}_{0:\overline{n}|})$ im Intervalle $0 \leqslant \tau \leqslant n$ mindestens einmal das Vorzeichen wechselt. Wegen der Monotonie von P_τ kann der Klammerausdruck diese Forderung nur dadurch erfüllen, dass er im betrachteten Intervall von positiven zu negativen Werten übergeht. An einer bestimmten Stelle, etwa an der Stelle $\tau = s$, wird also

$$\overline{P}_s - \overline{P}_{0:\overline{n}|} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \overline{P}_s = \overline{P}_{0:\overline{n}|}.$$

Es ist dann

$$\int_0^n D_\tau (\overline{P}_\tau - \overline{P}_{0:\overline{n}|})\, d\tau = \int_0^s D_\tau (\overline{P}_\tau - \overline{P}_{0:\overline{n}|})\, d\tau - \int_s^n D_\tau (\overline{P}_{0:\overline{n}|} - \overline{P}_\tau)\, d\tau = 0.$$

Im Intervall $0 < t < s$ ist $(\overline{P}_t - \overline{P}_{0:\overline{n}|})$ ständig positiv und somit auch $\Delta_{(t)}$. Falls aber $s \leqslant t < n$ ist, folgt aus den vorausgehenden Feststellungen

$$\int_0^t D_\tau (\overline{P}_\tau - \overline{P}_{0:\overline{n}|})\, d\tau = \int_0^s D_\tau (\overline{P}_\tau - \overline{P}_{0:\overline{n}|})\, d\tau - \int_s^t D_\tau (\overline{P}_{0:\overline{n}|} - \overline{P}_\tau)\, d\tau$$

und

$$\int_0^t D_\tau (\overline{P}_\tau - \overline{P}_{0:\overline{n}|})\, d\tau > \int_0^s D_\tau (\overline{P}_\tau - \overline{P}_{0:\overline{n}|})\, d\tau - \int_s^n D_\tau (\overline{P}_{0:\overline{n}|} - \overline{P}_\tau)\, d\tau = 0,$$

so dass also immer gilt:

$$\Delta_{(t)} > 0 \qquad \text{für} \qquad 0 < t < n. \tag{20}$$

Wir erinnern uns hier nochmals der ursprünglichen Definition von $\Delta_{(t)}$; nach (14) ist nämlich

$$\Delta_{(t)} = \overline{V}_t^s - \overline{V}_t^k.$$

Die Beziehung (20) sagt also aus, dass das durchschnittliche Selektionsdeckungskapital $\overline{V}_t^s$ ständig grösser ist als das Einzeldeckungskapital $\overline{V}_t^k$ nach der Kompakttafel. Diese Aussage bezieht sich nur, was wir noch ausdrücklich hervorheben, auf die zugrunde gelegte, durch die Altersverteilung $v(x)$ gekennzeichnete Personengesamtheit.

Zu dieser Erkenntnis ist für die gemischte Versicherung auch Del Vecchio gekommen, allerdings unter Verwendung einer auf andere Weise definierten Kompakttafel (vgl. § 3 des I. Teils).

Es ist jetzt der Moment gekommen, den dort festgestellten Widerspruch aufzuklären. Jecklin hat, wie schon erwähnt, anhand von numerischen Beispielen Abweichungen der Kompaktrücklage von der Selektionsrücklage sowohl im positiven als auch im negativen Sinn erhalten (vgl. [4]). Diese Tatsache stimmt also mit der soeben gewonnenen Erkenntnis nicht überein. Zur Erklärung rufen wir in Erinnerung, dass in der betreffenden Arbeit je die Selektionsrücklagen für vier in ihrer Altersstruktur abweichende Personengesamtheiten mit ein und derselben Kompaktrücklage verglichen worden sind. Die Kompaktrücklage ist dabei auf Grund der von Smolensky aufgestellten Kompakttafel ermittelt worden. Unsere Aussage über das Vorzeichen von $\Delta_{(t)}$ beruht jedoch auf einem Vergleich zwischen der Selektionsrücklage für eine bestimmte Versicherungsgesamtheit und derjenigen Kompaktrücklage, die mit Hilfe der aus *derselben* Personengesamtheit abgeleiteten Kompakttafel berechnet wurde. Zur Konstruktion der Kompakttafel haben wir ja die Altersverteilung der Personengesamtheit mit herangezogen.

Auch Del Vecchio hat seine Aussage mit Rücksicht auf eine wohlbestimmte Personengesamtheit gemacht. Im Sinne unserer Begriffsbildung hat er nur an Stelle der allgemeinen Altersverteilung $v(x)$ die spezielle Verteilung $l_{[x]}$ gewählt. Für seine Kompakttafel gilt nämlich

$$L_t = \int_{\alpha}^{\beta} l_{[x]+t}\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} l_{[x]} \cdot {}_tp_{[x]}\, dx,$$

d. h. in diesem speziellen Falle ist $v(x) = l_{[x]}$.

Damit haben wir zur Genüge dargelegt, dass sich unsere Aussage über das Vorzeichen von $\Delta_{(t)}$ immer auf eine *bestimmte* geschlossene Personengesamtheit bezieht.

Beim Studium der Zahlenbeispiele Jecklins drängt sich noch ein anderer Vergleich auf. In § 2 des ersten Teils haben wir die von Jecklin ausgearbeitete Methode zur angenäherten Rücklagenberechnung auf Grund eines mittleren Alters angegeben. Die Differenz zwischen der durch Einzelrechnung ermittelten gesamten Selektionsrücklage und der mit Hilfe der Methode Jecklins ermittelten Deckungsrücklage ist fast durchwegs positiv, welches Verhalten ja, wie wir soeben festgestellt haben, auch für die Kompakttafel typisch ist. Diese Tatsache rechtfertigt eine nähere Untersuchung über eventuelle Zusammenhänge zwischen dieser Methode des durchschnittlichen Eintrittsalters und der Kompakttafel.

Die Formel, die Jecklin zur durchschnittlichen Rücklagenberechnung verwendet, lautet bekanntlich

$$ {}_tV = \frac{a_{[z]:\overline{t}|}}{{}_tE_{[z]}} \cdot \sum_x C_x P_{[x]:\overline{n}|} - \frac{|{}_tA_{[z]}}{{}_tE_{[z]}} \cdot \sum_x C_x . $$

Dabei bedeutet z das mit Hilfe von $q_{[z]} = \sum_x C_x q_{[x]}$ gerechnete durchschnittliche Eintrittsalter und C_x die normierte Summenverteilung der Versicherungsgesamtheit.

Kontinuierlich lautet die Formel, wenn wir C_x durch das uns geläufigere, hier als Summenverteilung aufzufassende $v(x)$ ersetzen,

$$ {}_t\overline{V} = \frac{\bar{a}_{[z]:\overline{t}|}}{{}_tE_{[z]}} \int_0^\infty v(x)\, \overline{P}_{[x]:\overline{n}|} dx - \frac{|{}_t\bar{A}_{[z]}}{{}_tE_{[z]}} . \qquad (21) $$

Die Bestimmung des Durchschnittsalters z erfährt dabei eine kleine Modifikation, indem sie jetzt aus

$$ \mu_{[z]} = \int_0^\infty v(x)\, \mu_{[x]}\, dx \qquad \text{zu erfolgen hat.} $$

Ein Vergleich mit (3) zeigt uns, dass $\mu_{[z]}$ mit μ_0 der Kompakttafel identisch ist. Für einen späteren Zeitpunkt t werden naturgemäss

die Sterbensintensitäten, wenn auch nur unwesentlich, voneinander abweichen, so dass im allgemeinen $\mu_{[z]+t} \neq \mu_t$ ist.

Die Deutung der nach der Kompakttafel berechneten Barwerte $\bar{a}_{0:\overline{t}|}$, ${}_tE_0$ und ${}_{|t}A_0$ als Mittelwerte der entsprechenden Barwerte nach der Selektionstafel (vgl. II, § 1) lässt die Möglichkeit erkennen, an Stelle der Barwerte $a_{[z]:\overline{t}|}$, ${}_tE_{[z]}$ und ${}_{|t}\bar{A}_{[z]}$ diese ihnen entsprechenden Barwerte der Kompakttafel in die retrospektive Formel eingehen zu lassen. Offenbar ergeben sich nämlich nur unbedeutende Abweichungen, wenn man einen nach der Selektionstafel berechneten Barwert für das mit $v(x)$ gemittelte Eintrittsalter $[z]$ ersetzt durch das mit $r(x)$ gewogene Mittel der Barwerte nach der Selektionstafel.

In diesem Sinne ist der Ausdruck

$$ {}_t\overline{V} = \frac{\bar{a}_{0:\overline{t}|} \int_0^\infty v(x) \cdot \overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\, dx - {}_{t}\bar{A}_0}{{}_tE_0} \tag{22} $$

mit der Formel (21) gleichbedeutend. Nicht zu demselben Schluss kommt man durch den Vergleich mit der Kompaktrücklage

$$ \overline{V}{}^k_t = 1 - \frac{\bar{a}_{t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{0:\overline{n}|}} = \frac{\bar{a}_{0:\overline{t}|}\,\overline{P}_{0:\overline{n}} - {}_{t}\bar{A}_0}{{}_tE_0}. $$

Wir können wegen der Ungleichung

$$ \overline{P}_{0:\overline{n}|} < \int_0^\infty v(x)\, \overline{P}_{[x]:\overline{n}|}\, dx \qquad \text{(vgl. (7))} $$

unsere Aussage sogar dahin präzisieren, dass ${}_t\overline{V} > \overline{V}{}^k_t$ ist, dass also die Deckungsrücklage, nach (22) berechnet, stets grösser als die Kompaktrücklage ausfällt.

Die gemachten Ausführungen geben zu den folgenden zwei Feststellungen Anlass:

Einmal haben wir eine Erklärung gefunden für die stets positive Abweichung der nach Jecklins Methode ermittelten Deckungsrücklage von der genauen Selektionsrücklage. Für die Entwicklung dieser Methode beschreitet ja ihr Begründer für die Berücksichtigung der

Altersverteilung und die Verwendung von Durchschnittswerten ganz ähnliche Wege wie wir für die Entwicklung unserer Kompakttafel. Beide Verfahren müssen daher fast übereinstimmende Resultate zeitigen. Ein prinzipieller Unterschied zwischen der Methode von Jecklin und der Methode mittels der Kompakttafel besteht einzig darin, dass bei der Kompakttafel an Stelle des gewogenen Mittels aller Prämien $\overline{P}_{[x]:\overline{n}|}$ die Kompaktprämie $\bar{P}_{0:n_1}$ verwendet wird. Zahlenmässig fällt dieser Unterschied aber nur schwach ins Gewicht.

Als weitere Erkenntnis möchten wir sodann festhalten, dass die drei Grössen $\overline{V}_t^s$, $\overline{V}_t^k$ und ${}_tV$, aus denen die Gesamtrücklagen im Zeitpunkt t für die Gesamtheit aller Überlebenden je durch Multiplikation mit L_t gewonnen werden, nach den zuletzt angestellten Überlegungen und gestützt auf die Zahlenbeispiele Jecklins (siehe [4]) im allgemeinen der folgenden Ungleichung genügen:

$$\overline{V}_t^k < {}_t\overline{V} < \overline{V}_t^s. \tag{23}$$

Dies gilt trivialerweise auch für das Gesamtdeckungskapital, nämlich

$$L_t\,\overline{V}_t^k < L_t\,{}_t\overline{V} < L_t \cdot \overline{V}_t^s.$$

Es ist hier noch zu beachten, dass die Ungleichung ${}_t\overline{V} > \overline{V}_t^k$ nur bei Verwendung der retrospektiven Rücklagenformel richtig ist. Bei Verwendung der prospektiven Formel, in die der Barwert der Prämieneinnahmen bekanntlich mit dem negativen Vorzeichen eingeht, würden sich die Verhältnisse gerade umkehren, und es würde gelten: ${}_t\overline{V} < \overline{V}_t^k$.

Im Zuge eines Vergleichs der Kompakttafel mit andern Tafeln und Methoden zur Rücklagenberechnung müssen wir hier noch die bemerkenswerten Ausführungen Eldertons erwähnen, die er anlässlich eines Vortrages im Institute of Actuaries dargelegt hat [10]. Elderton schlägt nämlich vor, die Altersverteilung eines Versicherungsbestandes durch eine Frequenzkurve darzustellen; in Verbindung mit einer Sterbetafel liesse sich eine Tabelle der diskontierten Zahlen der Überlebenden herstellen. Mit dieser Tafel könnte die Rücklagenberechnung leicht vorgenommen werden, indem der Barwert der zukünftigen Leistungen des Versicherers und der zukünftigen Prämienzahlungen der Versicherten je durch eine Multiplikation mit dem Summen- bzw. mit dem Prämientotal ermittelt und durch Differenzbildung

daraus sofort das gesuchte Gesamtdeckungskapital gebildet werden könnte. Ohne in seinem Vortrag und in einer späteren Publikation über Frequenzkurven [11] seine Gedanken betreffend die Ermittlung des Deckungskapitals rechnerisch auszuwerten, empfiehlt Elderton. dieses Problem eingehend zu untersuchen. In der anschliessenden Diskussion sagten sämtliche Redner dieser Methode eine grosse Zukunft voraus, indem sie hauptsächlich für die Rücklageberechnung eines grossen Versicherungsbestandes eine wesentliche Erleichterung bedeute.

Die Gedanken Eldertons stehen ganz offensichtlich in enger Beziehung mit unserer Entwicklung der Kompakttafel; die Frequenzkurve ist nämlich in unserem Fall durch $v(x)$ und die diskontierte Zahl der Überlebenden durch

$$D_t = v^t L_t = v^t \int_0^\infty L_0 \, v(x) \, {}_tp_{[x]} \, dx$$

gegeben.

Falls seine weitern Ausführungen über die Barwertbildung der zukünftigen totalen Ausgaben und Einnahmen dahin zu verstehen sind, dass Elderton gestützt auf die diskontierten Zahlen der Lebenden die andern Kommutationszahlen der Kompakttafel und schliesslich die entsprechenden Barwerte berechnen will, so wäre diese Methode mit unserer Kompakttafel grundsätzlich gleichbedeutend.

§ 4.

Einige Funktionalgleichungen.

Für das Deckungskapital ist kennzeichnend, dass es sowohl in der Einzel- als auch in der Sozialversicherung einheitlich gebauten Differential- und Integralgleichungen genügt (vgl. etwa [12] und [13]). Es ist daher von Interesse, nachzuprüfen, ob auch für das Deckungskapital V_t^k nach der Kompakttafel und für das durchschnittliche Deckungskapital V_t^s nach der Selektionstafel ähnliche Funktionalgleichungen existieren.

Aus der Definition der retrospektiven Kompaktrücklage

$$\overline{V}_t^k = \int_0^t \frac{D_\tau}{D_t} (\overline{P}_{0:\overline{n}|} - \mu_\tau) \, d\tau$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{d}{dt}\overline{V}_t^k = \frac{D_t^2\,(\overline{P}_{0:\overline{n}|} - \mu_t) + D_t\,(\mu_t + \delta)\int_0^t D_\tau\,(\overline{P}_{0:\overline{n}|} - \mu_\tau)\,d\tau}{D_t^2}$$

$$= \overline{P}_{0:\overline{n}|} - \mu_t + (\mu_t + \delta)\int_0^t \frac{D_\tau}{D_t}\,(\overline{P}_{0:\overline{n}|} - \mu_\tau)\,d\tau$$

und somit

$$\frac{d}{dt}\overline{V}_t^k = (\mu_t + \delta)\,\overline{V}_t^k + \overline{P}_{0:\overline{n}|} - \mu_t\,. \tag{24}$$

Entsprechend folgt aus der Formel (13)

$$\overline{V}_t^s = \int_0^t \frac{D_\tau}{D_t}\,(\overline{P}_\tau - \mu_\tau)\,d\tau$$

die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\overline{V}_t^s = (\mu_t + \delta)\,\overline{V}_t^s + \overline{P}_t - \mu_t\,. \tag{25}$$

Mit der Berücksichtigung, dass $\overline{V}_0^k = \overline{V}_0^s = 0$ ist, folgen aus diesen beiden linearen Differentialgleichungen für das Deckungskapital durch Integration von 0 bis t die Integralgleichungen

$$\overline{V}_t^k = \int_0^t [\overline{V}_\tau^k\,(\mu_\tau + \delta) + \overline{P}_{0:\overline{n}|} - \mu_\tau]\,d\tau \tag{26}$$

und

$$\overline{V}_t^s = \int_0^t [\overline{V}_\tau^s\,(\mu_\tau + \delta) + \overline{P}_\tau - \mu_\tau]\,d\tau\,. \tag{27}$$

Die Tatsache, dass die Differenzfunktion $\Delta_{(t)}$ aus $\overline{V}_t^s$ und $\overline{V}_t^k$ durch Subtraktion hervorgegangen ist, legt die Vermutung nahe, dass $\Delta_{(t)}$ seinem Charakter nach selber ein Deckungskapital ist.

Um dies einzusehen, fassen wir in der Gleichung (15)

$$\Delta_{(t)} = \int_0^t \frac{D_\tau}{D_t} \left(\overline{P}_\tau - \overline{P}_{0:\overline{n}|}\right) d\tau$$

die Prämie $\overline{P}_{0:\overline{n}|}$ formal als konstante Sterbensintensität auf, so dass jetzt $\Delta_{(t)}$ in der Tat als Deckungskapital zu deuten ist, genau gleich wie etwa V_t^s in der oben wiederholten Formel (13); es ist in (13) nur μ_τ durch $\overline{P}_{0:\overline{n}|}$ zu ersetzen.

Die Deutung der Differenzfunktion $\Delta_{(t)}$ als Deckungskapital lässt die Übertragung der soeben aufgestellten Funktionalgleichungen auch auf $\Delta_{(t)}$ als sinnvoll erscheinen. Aus $\Delta_{(t)} = \overline{V}_t^s - \overline{V}_t^k$ folgt wegen (24) und (25) unmittelbar

$$\frac{d}{dt}\Delta_{(t)} = (\mu_t + \delta)\left(\overline{V}_t^s - \overline{V}_t^k\right) + \overline{P}_t - \overline{P}_{0:\overline{n}|}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\Delta_{(t)} = (\mu_t + \delta)\,\Delta_{(t)} + \overline{P}_t - \overline{P}_{0:\overline{n}|}. \tag{28}$$

Aus (26) und (27) folgt ferner die Integralgleichung

$$\Delta_{(t)} = \int_0^t \left[\Delta_{(\tau)}(\mu_\tau + \delta) + \overline{P}_\tau - \overline{P}_{0:\overline{n}|}\right] d\tau. \tag{29}$$

Die Funktionalgleichungen (28) und (29) hätten wir ebenfalls aus der Grundbeziehung (15) für $\Delta_{(t)}$ direkt herleiten können.

Diese Beispiele für funktionelle Zusammenhänge der Differenzfunktion liessen sich, der Eigenschaft von $\Delta_{(t)}$ als Deckungskapital entsprechend, vermehren. Wir wollen uns jedoch mit diesen Hinweisen begnügen und die Kompakttafel noch von einem ganz anderen Gesichtspunkt aus kritisch betrachten.

III. Teil.

Praktische Auswertung.

Im folgenden setzen wir uns zum Ziel, die Ergebnisse unserer theoretischen Untersuchungen über die Kompakttafel auf Grund der diskontinuierlichen Methode zahlenmässig auszuwerten. Zu diesem Zwecke stellen wir anhand eines konkreten Beispiels den Betrag der Abweichung der mittels der Kompakttafel berechneten Gesamtrücklage von der genau ermittelten Selektionsrücklage fest. Wir beschränken uns dabei auf Berechnungen innerhalb einer Modellgesellschaft, die den nachstehenden Voraussetzungen genügen soll:

1. Alle Versicherten gehen eine gemischte Versicherung von Fr. 100 ein.
2. Die Versicherungsdauer n betrage einheitlich 20 Jahre.
3. Der Bestand zu Beginn der Versicherung weise die in *Tabelle 1* gegebene Altersverteilung auf, mit $\alpha = 25$ und $\beta = 45$.

Diese Annahmen wurden frei gewählt, dürften aber (mit Ausnahme der Höhe der versicherten Leistungen) den tatsächlichen Verhältnissen bei einem Zugangsjahrgang bei Versicherungsgesellschaften nahekommen. Wir wollen jedoch den Hinweis auf die Bedeutung, die dem Studium anderer Zahlenbeispiele zukommt — bei veränderten Voraussetzungen über Altersverteilung und Vertragsdauer —, nicht unterlassen.

§ 1.

Die Konstruktion der Kompakttafel.

Nach den getroffenen Annahmen ist durch sinngemässe Übertragung der Definition (2) die nach der Dauer abgestufte Überlebensordnung in diskontinuierlicher Form gegeben durch

$$L_t = \sum_{x=\alpha}^{\beta} L_0 \, v(x)_{\,t} p_{[x]}. \tag{30}$$

Daraus bestimmt man

$$q_t = \frac{\sum_{x=\alpha}^{\beta} L_0 \, v(x) \, {}_tp_{[x]} \, q_{[x]+t}}{L_t} . \tag{31}$$

In Analogie zu μ_t erscheint bei diskontinuierlicher Betrachtungsweise q_t als gewogenes Mittel der Selektions-Sterbenswahrscheinlichkeiten. Die gleiche Aussage gilt für sämtliche versicherungstechnischen Grössen, denen bei kontinuierlicher Behandlung des Problems diese Mittelwerteigenschaft zukommt.

Ohne die Herleitungen im einzelnen durchzuführen, geben wir nunmehr die wesentlichsten Ergebnisse des zweiten Teils in diskontinuierlicher Darstellung an.

Aus der Beziehung (8) gewinnen wir bei Verwendung der Kompakttafel zunächst den nachstehenden Ausdruck für das Einzeldeckungskapital einer gemischten Versicherung:

$$V_t^k = 1 - \frac{\mathsf{a}_{t:n-t\rceil}}{\mathsf{a}_{0:\overline{n}\rceil}} . \tag{32}$$

Durch Multiplikation von V_t^k mit L_t erhalten wir die Kompaktrücklage für die geschlossene Gesamtheit im t. Versicherungsjahr.

Den Formeln (10) und (12) entsprechend ist

$$V_t^s = \frac{\sum_{x=\alpha}^{\beta} L_0 \, v(x) \, {}_tp_{[x]} \, {}_tV_{[x]}}{L_t} \tag{33}$$

und

$$P_t = \frac{\sum_{x=\alpha}^{\beta} L_0 \, v(x) \, {}_tp_{[x]} \, P_{[x]:\overline{n}\rceil}}{L_t} . \tag{34}$$

Durch Übertragung der Gleichung (16) erhalten wir schliesslich für die Differenzfunktion

$$\Delta_{(t)} = \frac{1}{{}_tE_0} \sum_{x=\alpha}^{\beta} v(x) \left[\frac{a_{[x]:\overline{t}|}}{a_{[x]:\overline{n}|}} - \frac{a_{0:\overline{t}|}}{a_{0:\overline{n}|}} \right]. \qquad (35)$$

Mit diesen Formeln ausgerüstet, schreiten wir jetzt zur Konstruktion der Kompakttafel. Für die Berechnung von L_t nach (30) haben wir die Selektionstafel $V \frac{\text{vor } 76/05}{76/05}$ [10] des Vereins Deutscher Lebensversicherungsgesellschaften verwendet; die Kommutationszahlen sind zu einem Zinsfuss von 4 % ermittelt (siehe *Tabelle 2)*.

§ 2.

Näherungsformeln für $\Delta_{(t)}$.

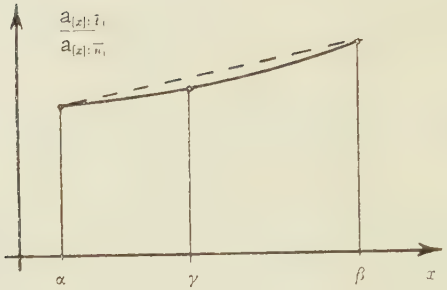
Bevor wir an die Berechnung des numerischen Beispiels herangehen, suchen wir nach Anhaltspunkten über die ungefähre Grösse von $\Delta_{(t)}$ und somit über die Genauigkeit der Annäherung an die Selektionsrücklage, wenn wir zur Rücklagenberechnung die Kompakttafel benützen.

Ausgangspunkt unserer Untersuchung ist die Beziehung (35); sie lautet:

$$\Delta_{(t)} = \frac{1}{{}_tE_0} \sum_{x=\alpha}^{\beta} v(x) \left[\frac{a_{[x]:\overline{t}|}}{a_{[x]:\overline{n}|}} - \frac{a_{0:\overline{t}|}}{a_{0:\overline{n}|}} \right].$$

Aus diesem Ausdruck greifen wir die Grösse $\frac{a_{[x]:\overline{t}|}}{a_{[x]:\overline{n}|}}$ heraus. Halten wir darin t und n fest, so erscheint sie nur als Funktion von x. Unsere Untersuchungen über $\frac{a_{[x]:\overline{t}|}}{a_{[x]:\overline{n}|}}$ ergaben anhand der schon erwähnten Sterbetafel $V \frac{\text{vor } 76/05}{76/05}$ [10] 4 %, der Absterbeordnung der schweizerischen Bevölkerung, Männer, S. M. 1921—1930, 3½ % und der Tafel der Assurés Français (A. F. 3½ %) übereinstimmend das folgende Resultat:

$\frac{a_{[x]:\overline{t}|}}{a_{[x]:\overline{n}}}$ ist monoton wachsend in x und verläuft konvex gegen die x-Achse.



Die geradlinige Verbindung zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt der Kurve muss also stets oberhalb derselben verlaufen, wie es unsere Skizze veranschaulicht.

Weil $\frac{a_{[x]:\overline{t}|}}{a_{[x]:\overline{n}|}}$ in der Gleichung für $\Delta_{(t)}$ mit dem positiven Vorzeichen auftritt, vergrössern wir $\Delta_{(t)}$, falls wir zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt linear interpolieren.

Es wird also für $0 < t < n$

$$\Delta_{(t)} < \Phi_{(t)} = \frac{1}{{}_tE_0} \sum_{x=\alpha}^{\beta} v(x) \left[A_{(t} \ (x—\alpha) — B_{(t)} \right],$$

wenn wir setzen:

$$A_{(t)} = \frac{\frac{a_{[\beta]:\overline{t}|}}{a_{[\beta]:\overline{n}|}} — \frac{a_{[\alpha]:\overline{t}|}}{a_{[\alpha]:\overline{n}|}}}{\beta—\alpha} \tag{36}$$

$$B_{(t)} = \frac{a_{0:\overline{t}|}}{a_{0:\overline{n}|}} — \frac{a_{[\alpha]:\overline{t}|}}{a_{[\alpha]:\overline{n}|}}.$$

Für die Argumente $t = 0$ und $t = n$ erhalten wir vorerst

$$\Delta_{(0)} = \Phi_{(0)} = 0$$

$$\Delta_{(n)} = \Phi_{(n)} = 0.$$

Durch Ausklammern von $A_{(t)}$ und $B_{(t)}$ geht der Ausdruck für $\Phi_{(t)}$ wegen der Normiertheit von $v(x)$ über in

$$\Phi_{(t)} = \frac{1}{{}_tE_0}\left\{A_{(t)}\sum_{x=\alpha}^{\beta} v(x)\,(x—\alpha) — B_{(t)}\right\}. \tag{37}$$

Mit der Funktion $\Phi_{(t)}$ haben wir eine obere Schranke von $\Delta_{(t)}$ gewonnen. Weil $\Phi_{(t)}$ im Gegensatz zu $\Delta_{(t)}$ leicht zu ermitteln ist, können wir auf einfache Weise Berechnungen über die im äussersten Falle zu erwartenden Abweichungen der Kompaktrücklage von der Selektionsrücklage anstellen.

Das Bild der Funktion $\frac{a_{[x]:\overline{t}|}}{a_{[x]:\overline{n}|}}$ legt eine weitere, genauere Abschätzung der Differenzfunktion $\Delta_{(t)}$ nahe.

Verwenden wir nämlich neben dem Anfangs- und dem Endpunkt noch einen dritten Wert der Funktion $\frac{a_{[x]:\overline{t}|}}{a_{[x]:\overline{n}|}}$, etwa an der Stelle $x = \gamma$, so können wir $\frac{a_{[x]:\overline{t}|}}{a_{[x]:\overline{n}|}}$ mit guter Genauigkeit durch ein Polynom zweiten Grades approximieren. Setzen wir diese Funktion zweiten Grades in der Gleichung für $\Delta_{(t)}$ an Stelle von $\left[\frac{a_{[x]:\overline{t}}}{a_{[x]:\overline{n}|}} — \frac{a_{0:\overline{t}|}}{a_{0:\overline{n}|}}\right]$ ein, so wird $\Delta_{(t)}$ durch die neue Funktion

$$\Psi_{(t)} = \frac{1}{{}_tE_0}\left\{a_{(t)}\sum_{x=\alpha}^{\beta}(x—\alpha)^2\,v(x) + b_{(t)}\sum_{x=\alpha}^{\beta}(x—\alpha)\,v(x) — c_{(t)}\right\} \tag{38}$$

angenähert dargestellt.

Von der Funktion $\Psi_{(t)}$ können wir natürlich nicht wie von $\Phi_{(t)}$ voraussagen, ob sie kleinere oder grössere Werte liefert als $\Delta_{(t)}$; dagegen stellt sie eine praktisch brauchbare und leicht zu berechnende Ersatzfunktion der Differenzfunktion $\Delta_{(t)}$ dar.

Wählen wir den dritten der vorgegebenen Funktionswerte an der Stelle $x = \gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$, so nehmen in (38) die Koeffizienten die Form an:

$$a_{(t)} = \frac{2\,\frac{a_{[\alpha]:\overline{t}|}}{a_{[\alpha]:\overline{n}|}} + 2\cdot\frac{a_{[\beta]:\overline{t}|}}{a_{[\beta]:\overline{n}|}} - 4\,\frac{a_{[\gamma]:\overline{t}|}}{a_{[\gamma]:\overline{n}|}}}{(\beta-\alpha)^2}$$

$$b_{(t)} = \frac{-3\,\frac{a_{[\alpha]:\overline{t}|}}{a_{[\alpha]:\overline{n}|}} - \frac{a_{[\beta]:\overline{t}|}}{a_{[\beta]:\overline{n}|}} + 4\,\frac{a_{[\gamma]:\overline{t}|}}{a_{[\gamma]:\overline{n}|}}}{(\beta-\alpha)} \qquad (39)$$

$$c_{(t)} = \frac{a_{0:\overline{t}|}}{a_{0:\overline{n}|}} - \frac{a_{[\alpha]:\overline{t}|}}{a_{[\alpha]:\overline{n}|}}.$$

Die Funktionswerte für $\Phi_{(t)}$ und $\Psi_{(t)}$ finden sich nebst den zu ihrer Bestimmung notwendigen Hilfszahlen in der *Tabelle 3.* Die Kolonnen (5) und (10) enthalten die Beträge, um welche das nach der Kompakttafel ermittelte Gesamtdeckungskapital zu erhöhen ist, damit es die Selektionsrücklage entweder sicherlich an Grösse übertrifft (Korrektur nach Kolonne [5]) oder aber dieser möglichst nahe kommt (Korrektur nach Kolonne [10]). Es muss jedoch auffallen, dass $\Phi_{(t)}$ und $\Psi_{(t)}$ nicht einmal in der Grössenordnung übereinstimmen, so dass zum Zwecke eines Vergleiches die Kenntnis der tatsächlich auftretenden Abweichungen wünschenswert ist.

§ 3.

Beispiel.

Die vorgenommenen Untersuchungen ermöglichen es nunmehr, an die Berechnung der Deckungsrücklagen innerhalb unserer Modellgesellschaft heranzutreten. An erster Stelle nehmen wir die Gegenüberstellung der Kompaktrücklage und der Selektionsrücklage vor.

Zur Ermittlung der Kompaktrücklage ist nach den getroffenen Voraussetzungen bezüglich Versicherungssumme und Vertragsdauer das Produkt $100 \cdot L_t \cdot V_t^k$ zu bilden. Die Werte für L_t und V_t^k entnehmen wir der Tabelle 2. Die Selektionsrücklage haben wir auf Grund der schon zitierten Selektionstafel $V\,\frac{\text{vor } 76/05}{76/05}$ [10] so ermittelt, dass wir das Einzeldeckungskapital je für die Eintrittsalter [25], [30], [35], [40] und [45] nach der Formel

$$ {}_tV_{[x]} = 1 - \frac{a_{[x]+t:\overline{n-t}|}}{a_{[x]:\overline{n}|}} $$

berechneten. Die Werte für die übrigen Eintrittsalter wurden durch lineare Interpolation gewonnen mit Ausnahme derjenigen für $[x]$ zwischen [40] und [45] und mit einer Dauer t von 17 und 18. Die Ermittlung dieser Werte erfolgte wegen der grossen Unterschiede durch Verwendung der Differenzen erster und zweiter Ordnung.

Die Resultate unserer Berechnungen sind in der *Tabelle 4* angeführt. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen der theoretischen Untersuchungen sind die Differenzen zwischen der Selektionsrücklage und der Kompaktrücklage positiv. Ausserdem stellen wir fest, dass diese Abweichungen sehr klein sind, betragen sie doch, abgesehen von den ersten drei Versicherungsjahren, weniger als ein Promille des Gesamtdeckungskapitals.

Der Vergleich mit den Kolonnen (5) und (10) der Tabelle 3 ergibt jetzt, dass die mittels der obern Schranke berechneten Zahlen $100 \cdot L_t \cdot \Phi_{(t)}$ den tatsächlichen Verhältnissen keineswegs entsprechen. Dagegen stimmen die Werte $100 \cdot L_t \cdot \Psi_{(t)}$ mit den Abweichungen $100 \cdot L_t \cdot \Delta_{(t)}$ gut überein, so dass die korrigierte Kompaktrücklage $100 \cdot L_t \, (V_t^k + \Psi_{(t)})$ der Selektionsrücklage $100 \, L_t \, V_t^s = 100 \, L_t \, (V_t^k + \Delta_{(t)})$ sehr nahe kommt. In der *Tabelle 5* sind diese Werte zusammengestellt. Die Differenzen zwischen der Selektionsrücklage und der mittels $\Psi_{(t)}$ korrigierten Kompaktrücklage weisen abwechselndes Vorzeichen auf, welcher Umstand die Möglichkeit einer Kompensation der ohnehin geringen Fehler in sich schliesst.

Mit diesem Beispiel haben wir gezeigt, dass die Kompakttafel zur angenäherten Berechnung der Selektionsrücklage geeignet ist. Ausserdem haben wir Methoden entwickelt, die mit relativ geringem Mehraufwand an Rechenarbeit die Ermittlung von Korrekturwerten gestatten, so dass die Selektionsrücklage mit beliebiger Genauigkeit approximiert werden kann.

Um zu unterstreichen, dass die Kompakttafel nicht nur an Stelle einer Selektionstafel verwendet werden kann, erinnern wir an unsere Bemerkung, wonach auch zu einer Aggregat- oder einer Dekremententafel eine zugehörige Kompakttafel konstruiert werden kann. Zu diesem Zwecke muss man nur in der Beziehung (30) an Stelle von ${}_tp_{[x]}$ die Grösse ${}_tp_x$ der Aggregattafel bzw. die entsprechende

Grösse der Dekremententafel verwenden. Die Rücklagenberechnung hat im übrigen in der gleichen Weise vor sich zu gehen, wie wir soeben in unserem Beispiel für die Selektionstafel gezeigt haben.

Zum Schluss ziehen wir einen Vergleich zwischen der Methode Jecklins und der hier entwickelten Methode der Rücklagenberechnung mit Hilfe der Kompakttafel. Aus der Ungleichung (23) haben wir zunächst zu folgern, dass die Methode Jecklins bei Verwendung der retrospektiven Formel für das Deckungskapital eine bessere Annäherung an die genaue Selektionsrücklage ermöglicht, als dies bei Verwendung der Kompakttafel der Fall ist. Dagegen ist die Rücklagenberechnung nach der Kompakttafel einfacher, weil die Deckungsrücklage für das t. Versicherungsjahr durch die einzige Multiplikation von V_t^k mit dem Summentotal ermittelt wird. Bei der Methode Jecklins wird ausser dem Summentotal noch das Prämientotal benötigt.

Als Ergebnis unserer Untersuchung glauben wir die Folgerung ziehen zu dürfen, dass sowohl die Methode von Jecklin als auch die Kompakttafel der Praxis gute Dienste leisten können. Ausschlaggebend für die Wahl zwischen diesen beiden Arten der Rücklagenberechnung ist die geforderte Genauigkeit der Annäherung an die Selektionsrücklage und der Aufwand an Rechenarbeit und Zeit.

Zusammenfassung.

Die Kompakttafel wurde zur Vereinfachung der Berechnung des Deckungskapitals ganzer Versicherungsbestände in die Versicherungsmathematik eingeführt. Dadurch aber, dass sie die Altersverteilung eines beliebig vorgegebenen Versicherungsbestandes nicht berücksichtigte, standen ihrer praktischen Verwendbarkeit bemerkenswerte Schwierigkeiten gegenüber. Durch Erweiterung des Begriffes der Kompakttafel unter Berücksichtigung der Altersverteilung $v(x)$ haben wir die festgestellten Mängel behoben.

Das Ziel unserer Untersuchung bestand sodann hauptsächlich darin, die Kompakttafel hinsichtlich der Rücklagenberechnung gemischter Versicherungen anhand der Selektionstafel zu werten. Das Ergebnis unserer Arbeit fassen wir wie folgt zusammen: Die mittels der Kompakttafel berechneten Werte für das Gesamtdeckungskapital der prämienpflichtigen Versicherung sind stets kleiner als die auf Grund der Selektionstafel ermittelten; immerhin zeigt die rechnerische Durchführung eines Beispiels, dass die auftretenden Abweichungen geringfügig sind. Für den Fall der prämienfreien Versicherung dagegen stimmen die nach den beiden Sterbetafeln berechneten Gesamtrücklagen miteinander überein.

Mathematisch-versicherungswissenschaftliches Seminar
der Universität Bern, Juli 1941.

Tabellen.

Altersverteilung $v(x)$ der Eintrittsgeneration.

Tabelle 1.

x	$10^5 \cdot v(x)$	x	$10^5 \cdot v(x)$
25	745	36	6428
26	2838	37	5978
27	4334	38	5480
28	5380	39	4982
29	6227	40	4385
30	6775	41	3736
31	7124	42	3088
32	7224	43	2290
33	7074	44	1592
34	6975	45	598
35	6747	Total	100 000

Grundzahlen der Kompakttafel.

Benutzte Sterbetafel: $V \frac{\text{vor } 76/05}{76/06}$ [10]; Zinsfuss: 4 %.

Tabelle 2.

t	q_t	L_t	D_t	$N_t - N_{20}$	$a_{t:\overline{20-t}\rceil}$	$V^k_{t\ n=20}$
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0	0.00277	100 000	100 000	1 326 475	13.2648	0.0000
1	0.00433	99 723	95 888	1 226 475	12.7907	0.0357
2	0.00539	99 291	91 800	1 130 587	12.3158	0.0715
3	0.00616	98 756	87 794	1 038 787	11.8321	0.1080
4	0.00682	98 148	83 897	950 993	11.3352	0.1455
5	0.00746	97 479	80 121	867 096	10.8223	0.1841
6	0.00814	96 752	76 465	786 975	10.2920	0.2241
7	0.00886	95 964	72 925	710 510	9.7430	0.2655
8	0.00960	95 114	69 499	637 585	9.1740	0.3084
9	0.01045	94 201	66 184	568 086	8.5834	0.3529
10	0.01136	93 217	62 974	501 902	7.9700	0.3992
11	0.01217	92 158	59 864	438 928	7.3321	0.4473
12	0.01305	91 036	56 861	379 064	6.6665	0.4974
13	0.01393	89 848	53 960	322 203	5.9711	0.5499
14	0.01493	88 596	51 162	268 243	5.2430	0.6047
15	0.01601	87 273	48 460	217 081	4.4796	0.6623
16	0.01720	85 876	45 850	168 621	3.6777	0.7227
17	0.01839	84 399	43 328	122 771	2.8335	0.7864
18	0.01974	82 847	40 896	79 443	1.9426	0.8536
19	0.02124	81 212	38 547	38 547	1.0000	0.9246
20	—	79 487	36 277	—	—	1.0000

Hilfszahlen und Werte für $\Phi_{(t)}$ und $\Psi_{(t)}$.

$$\Phi_{(t)} = \frac{1}{{}_tE_0}\left\{A_{(t)}\sum_{x=\alpha}^{\beta} v(x)\,(x—\alpha) — B_{(t)}\right\}$$

$$\Psi_{(t)} = \frac{1}{{}_tE_0}\left\{a_{(t)}\sum_{x=\alpha}^{\beta} v(x)\,(x—\alpha)^2 + b_{(t)}\sum_{x=\alpha}^{\beta} v(x)\,(x—\alpha) — c_{(t)}\right\}$$

$$\sum_{x=\alpha}^{\beta} v(x)\,(x—\alpha) = 9.11485 \qquad \sum_{x=\alpha}^{\beta} v(x)\,(x—\alpha)^2 = 105.73009.$$

Tabelle 3.

t	$A_{(t)}$	$B_{(t)}$	${}_tE_0$	$\Phi_{(t)}$	$100 \cdot L_t \cdot \Phi_{(t)}$	$a_{(t)}$	$b_{(t)}$	$c_{(t)}$	$\Psi_{(t)}$	$100 \cdot L_t \cdot \Psi_{(t)}$
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	0.00032	0.0019	0.9589	0.0010	9 972	0.000013	0.00006	0.0019	0.00002	199
2	0.00061	0.0036	0.9180	0.0022	21 844	0.000025	0.00011	0.0036	0.00004	397
3	0.00088	0.0053	0.8779	0.0031	30 614	0.000034	0.00020	0.0053	0.00013	1284
4	0.00111	0.0067	0.8390	0.0041	40 241	0.000043	0.00025	0.0067	0.00015	1472
5	0.00131	0.0079	0.8012	0.0050	48 740	0.000050	0.00031	0.0079	0.00027	2632
6	0.00148	0.0090	0.7646	0.0059	57 084	0.000055	0.00038	0.0090	0.00037	3580
7	0.00161	0.0099	0.7292	0.0066	63 336	0.000060	0.00041	0.0099	0.00025	2399
8	0.00171	0.0105	0.6950	0.0073	69 433	0.000063	0.00045	0.0105	0.00037	3519
9	0.00177	0.0110	0.6618	0.0077	72 535	0.000064	0.00049	0.0110	0.00036	3391
10	0.00179	0.0112	0.6297	0.0081	75 506	0.000064	0.00051	0.0112	0.00035	3263
11	0.00178	0.0112	0.5986	0.0084	77 413	0.000062	0.000525	0.0112	0.00025	2304
12	0.00172	0.0108	0.5686	0.0086	78 291	0.000060	0.000505	0.0108	0.00025	2276
13	0.00162	0.0103	0.5396	0.0083	74 574	0.000057	0.00048	0.0103	0.00020	1797
14	0.00149	0.0095	0.5116	0.0080	70 877	0.000052	0.00045	0.0095	0.00020	1772
15	0.00132	0.0084	0.4846	0.0074	64 582	0.000046	0.000395	0.0084	0.00012	1047
16	0.00112	0.0072	0.4585	0.0065	55 819	0.000038	0.000355	0.0072	0.00013	1116
17	0.00088	0.0056	0.4333	0.0055	46 419	0.000030	0.000275	0.0056	0.00018	1519
18	0.00062	0.0040	0.4090	0.0042	34 796	0.000021	0.00020	0.0040	0.00010	828
19	0.00032	0.0020	0.3855	0.0023	18 679	0.000011	0.00001	0.0020	0.00000	—
20	0.00000	0.0000	0.3628	0.0000	—	0.000000	0.00000	0.0000	0.00000	—

Die Gesamtrücklage nach der Selektions- und der Aggregattafel.

Gemischte Versicherung der Summe 100, Dauer $n = 20$, Zinsfuss 4 %.

Tabelle 4.

t	Selektions-rücklage $= 100\, L_t\, V_t^s$	Kompakt-rücklage $= 100\, L_t\, V_t^k$	Abweichung (1) — (2) $= 100 L_t \Delta_{[t]}$	Abw. in ‰ der Selekt.-Rücklage
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
1	356 724	356 011	713	2.00
2	711 094	709 931	1163	1.64
3	1 067 696	1 066 565	1131	1.06
4	1 429 320	1 428 053	1267	0.89
5	1 796 112	1 794 588	1524	0.85
6	2 169 919	2 168 212	1707	0.79
7	2 549 627	2 547 844	1783	0.70
8	2 935 226	2 933 316	1910	0.65
9	3 326 146	3 324 353	1793	0.54
10	3 722 282	3 721 223	1059	0.28
11	4 123 412	4 122 227	1185	0.29
12	4 530 001	4 528 131	1870	0.41
13	4 942 051	4 940 742	1309	0.26
14	5 359 219	5 357 400	1819	0.34
15	5 781 062	5 780 091	971	0.17
16	6 207 516	6 206 259	1257	0.20
17	6 638 043	6 637 137	906	0.14
18	7 071 892	7 071 820	72	0.01
19	7 509 106	7 508 862	244	0.03
20	7 948 700	7 948 700	—	—

Die mittels $\Psi_{(t)}$ korrigierten Werte der Kompaktrücklage.

Tabelle 5.

t	$100 \cdot L_t \cdot \Psi_{(t)}$	Komp.-R. $= 100 L_t V_t^k$	Korrigierte Komp.-R. $= (1) + (2)$	Selektions-rücklage	Abweichung (4)—(3)	Abw. in $^0/_{00}$ der Sel.-R.
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	199	356 011	356 210	356 724	+ 514	+ 1.44
2	397	709 931	710 328	711 094	+ 766	+ 1.08
3	1284	1 066 565	1 067 849	1 067 696	— 153	— 0.14
4	1472	1 428 053	1 429 525	1 429 320	— 205	— 0.14
5	2632	1 794 588	1 797 220	1 796 112	— 1108	— 0.62
6	3580	2 168 212	2 171 792	2 169 919	— 1873	— 0.86
7	2399	2 547 844	2 550 243	2 549 627	— 616	— 0.24
8	3519	2 933 316	2 936 835	2 935 226	— 1609	— 0.55
9	3391	3 324 353	3 327 744	3 326 146	— 1598	— 0.48
10	3263	3 721 223	3 724 486	3 722 282	— 2204	— 0.59
11	2304	4 122 227	4 124 531	4 123 412	— 1119	— 0.27
12	2276	4 528 131	4 530 407	4 530 001	— 406	— 0.09
13	1797	4 940 742	4 942 539	4 942 051	— 488	— 0.10
14	1772	5 357 400	5 359 172	5 359 219	+ 47	+ 0.01
15	1047	5 780 091	5 781 138	5 781 062	— 76	— 0.01
16	1116	6 206 259	6 207 375	6 207 516	+ 141	+ 0.02
17	1519	6 637 137	6 638 656	6 638 043	— 613	— 0.09
18	828	7 071 820	7 072 648	7 071 892	— 756	— 0.11
19	—	7 508 862	7 508 862	7 509 106	+ 244	+ 0.03
20	—	7 948 700	7 948 700	7 948 700	—	—

Literaturverzeichnis.

[1] Smolensky, P.: Sulle tavole compatte di mortalità. Mitteilungen des X. Internationalen Aktuarkongresses, Bd. 5, Rom 1934.

[2] Smolensky, P.: Sull' importanza delle tavole di selezione fra le basi tecniche dell' assicurazione sulla vita. Atti dell' istituto nazionale delle assicurazioni. Bd. 7, Rom 1935.

[3] Jecklin, H.: Einige Bemerkungen zu Smolenskys «Kompakt-Tafeln». Das Versicherungsarchiv, 5. Jahrgang, 1934.

[4] Jecklin, H.: Reserveberechnung nach Gruppen gleicher verflossener Dauer. Das Versicherungsarchiv, 5. Jahrgang, 1934.

[5] Jecklin, H.: Die Vereinfachung der Reserveberechnung in der Lebensversicherung. Möglichkeiten — Grenzen. Österreichische Revue Nrn. 47 und 48, 1934.

[6] Vajda, St.: Über Selekttafeln und Aggregattafeln. Mitteilungen des X. Internationalen Aktuarkongresses, Bd. 5, Rom 1934.

[7] Bodoni, G., und Crosato, P.: Sulla possibilità di sostituire, nel calcolo del totale dei premi e delle riserve, ad una tavola selezionata una tavola aggregata oppure una tavola compatta. Atti dell' istituto nazionale delle assicurazioni, Bd. 7, Rom 1935.

[8] Del Vecchio, E.: Il problema generale del calcolo della riserva matematica su tavole compatte. Giornale di matematica finanziaria, Bd. 6, Turin 1936.

[9] Del Vecchio, E.: Sul comportamento del tasso istantaneo di una tavola compatta di mortalità. Giornale di matematica finanziaria, Bd. 7, Turin 1937.

[10] Elderton, P.: A new law of survivorship. The Review 4. November 1932.

[11] Elderton, P.: An approximate law of survivorship and other notes on the use of frequency curves in actuarial statistics. Journal of the Institute of Actuaries, Vol. LXV, 1934.

[12] Berger, A.: Mathematik der Lebensversicherung, Wien, Julius Springer, 1939.

[13] Zwinggi, E.: Zur Darstellung des Deckungskapitals in der sozialen Altersversicherung. Mitteilungen des X. Internationalen Aktuarkongresses, Rom 1934.

[14] Pólya-Szegö: Aufgaben und Lehrsätze der Analysis, Bd. I, S. 54. Berlin, Julius Springer, 1925.

[15] Courant, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, I. und II. Bd., Berlin, Julius Springer, 1930.

Lebenslauf.

Ich wurde am 29. Januar 1917 geboren. Die Elementarschulen (sechs Jahre Primar- und drei Jahre Bezirksschule) durchlief ich in Grenchen. Sodann trat ich in die 4. Klasse der Realabteilung der Kantonsschule Solothurn ein.

Im Herbst 1936 bestand ich die Maturität und immatrikulierte ich mich an der Universität Bern. Meine Studien erstreckten sich auf die Gebiete: Versicherungsmathematik, Mathematik und Nationalökonomie.

Während der Studienferien war mir bei der Lebensversicherungsgesellschaft «Vita» in Zürich mehrmals die Gelegenheit geboten, die Lebensversicherungstechnik von der praktischen Seite kennenzulernen.

Bern, den 11. Juni 1941.

Kurt Stauber.